Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна академія наук України
Національний центр «Мала академія наук України»

В. В. ПЛАХОТНИК
О. В. ПЕРЕГУДА

ВСЕУКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИЧНА ОЧНО-ЗАОЧНА ШКОЛА (2012–2013 навчальний рік)

Збірник навчально-методичних матеріалів

Київ 2013

Рекомендовано науково-методичною радою
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 1 від 20.01.2013)

Плахотник В. В., Перегуда О. В. Всеукраїнська математична очно-заочна школа Малої академії наук України (2012–2013 н. р.). Збірник навчально-методичних матеріалів / [за ред. О. В. Лісового]. — К., 2013. — 36 с.

Збірник підготовлений відповідно до навчальної програми Всеукраїнської математичної очно-заочної школи.

Видання містить:

- контрольні завдання;
- методичні рекомендації та розв'язки різних типів задач з математики;
- приклади авторських задач дослідницького характеру.

Збірник адресований учасникам Всеукраїнської математичної очно-заочної школи, а також на допомогу іншим учням для підготовки до контрольних робіт з математики у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України.

Шановні старшокласники!

Одним із пріоритетів діяльності Малої академії наук України є розвиток наукових напрямів фізико-математичного і технічного профілів, який потребує повноцінного забезпечення ефективним і сучасним лабораторним та навчально-методичним інструментарієм. З цією метою Мала академія наук України активно працює над створенням лабораторно-дослідницького комплексу «МАНлаб», на базі якого послідовно здійснює реалізацію ряду науково-освітніх проектів, серед яких — Всеукраїнські профільні очно-заочні школи Малої академії наук України.

Одним із головних завдань проекту є формування інтерактивного освітнього середовища, забезпечення умов для проведення досліджень, в тому числі в дистанційному режимі, що сприяє розширенню цільової учнівської аудиторії.

Навчально-виховний процес у профільних школах здійснюється за спеціально розробленими програмами і навчальними планами, які органічно поєднують колективну та індивідуальну форми роботи і містять такі змістовні модулі: «Основи дослідницької роботи», «Профільний навчальний курс», «Організація індивідуальної дослідницької діяльності слухачів».

На сьогодні для формування науково-дослідницьких завдань у профільних очно-заочних школах використовуються навчальне та наукове цифрове обладнання українських виробників та світових брендів, а саме: німецької компанії ***«PHYWE»***, ізраїльської компанії ***«Fourier»***, американської компанії ***«Celestron»***, японської компанії ***«Tokyo Boeki Technology Ltd».***

Креативність змісту навчання передбачає також навчально-розвивальнії програми, що спрямовані на формування і розвиток інтелектуальних умінь, комунікативних здібностей, навичок самоуправління й самоорганізації, необхідних для творчої самореалізації учнів.

До викладання в школах залучаються науковці НАН України, науково-педагогічні працівники вищих навчальних закладів, педагогічні працівники МАН України, відомі діячі науки, техніки та культури держави.

Узагальнюючи досвід роботи Всеукраїнської математичної очно-заочної школи, науковцями – Володимиром Плахотником, доцентом кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидатом фізико-математичних наук, і Олегом Перегудою, доцентом кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидатом фізико-математичних наук, підготовлено цей збірник, у якому представлені завдання, методичні рекомендації та розв'язки різних типів задач з математики, а також приклади авторських задач дослідницького характеру для слухачів математичної школи на 2012–2013 н. р.

За допомогою збірника ви маєте змогу самостійно вирішити завдання з математики, перевірити свій рівень знань і долучитися до науково-дослідницької діяльності.

Пещеріна Тетяна Вікторівна,
заступник директора з навчально-виховної роботи
Національного центру «Мала академія наук України»

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з математики настановної сесії Всеукраїнської математичної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

10 клас

1. Спростити вираз $(x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Розв'язок: Розкриваючи дужки і скорочуючи, дістанемо

$$x^{13} - x^{10} - x^8 + x^5 - x^4 - x^2 - 1.$$

2. Знайти множину всіх значень, яких може набувати функція $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x - 3}$.

Розв'язок: Запитання умови можна поставити так: при яких значеннях параметра y рівняння $y(x^2 - 6x - 3) = x^2 - 3x$ має принаймні один розв'язок? При $y \neq 1$ маємо квадратне рівняння, у якого $D = 48y^2 - 48y + 9$, тому відповідь отримаємо з нерівності $D \geq 0$, звідки $y \in (-\infty; \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}; +\infty)$. Потрібно зауважити, що $y = 1$ також належить множині значень функції, бо тоді рівняння буде лінійним і матиме розв'язок $x = -1$.

3. На координатній площині Oxy схематично зобразити множину точок, для координат $(x; y)$ яких справджується рівність $|y| + x^2 = \sqrt{|x| - |y|}$.

Розв'язок: Шукана множина симетрична відносно обох осей координат, бо рівність не змінюється при заміні x на $-x$ чи y на $-y$, тому достатньо зобразити її у першій чверті, а потім скористатися симетрією. Матимемо $y + x^2 = \sqrt{x - y}$. Зазначене рівносильне системі

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y^2 + (2x^2+1)y + x^4 - x = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, дістанемо $y = x - x^2$ або $y = -x^2 - x - 1$. Другий випадок суперечить нерівностям $x \ge 0, y \ge 0$, тому вийде, що $y = x - x^2$, де $0 \le x \le 1$ – дуга параболи, що знаходиться у першій чверті. Остаточну відповідь дістанемо із симетрії (вийде крива, схожа на ∞).

4. Скільки різних натуральних дільників має число 640000000?

Розв'язок: Дане число має вигляд $64 \cdot 10^7 = 2^6 \cdot 2^7 \cdot 5^7 = 2^{13} \cdot 5^7$, тому кожний його дільник має вигляд $2^m \cdot 5^n$, де для цілих m, n справджуються нерівності $0 \le m \le 13$, $0 \le n \le 7$, тому всього існує $14 \cdot 8 = 112$ дільників.

5. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а площі трикутників ABC, BCD, AOD дорівнюють відповідно $10, 7, 2$. Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

Розв'язок: Позначимо площі трикутників ABO, BCO, CDO, DAO через x, y, u, v відповідно. Тоді, враховуючи, що для довільного чотирикутника справджується рівність $xu = yv$, для відшукання невідомих x, y, u, v дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ u + y = 7 \\ v = 2 \\ xu = yv \end{cases}.$$

Виразивши через y невідомі x, v, отримаємо рівняння $y^2 - 19y + 70 = 0$, один з коренів $y = 14$ якого дає від'ємні x, v, тому маємо єдиний корінь $y = 5$, для якого площа чотирикутника дорівнює 14.

6. Нехай $p > 3$, $p -$ просте число. Довести, що число $p^2 - 25$ ділиться без остачі на 24.

Розв'язок: Розглянувши остачі при діленні простого числа $p > 3$ на 12, дістанемо, що просте число p можна записати або у вигляді $p = 12n \pm 1$, або у вигляді $p = 12n \pm 5$. Тоді $p^2 - 25$ дорівнює або $144n^2 \pm 24n - 24$, або $144n^2 \pm 120n$. У будь-якому випадку множник 24 легко помітити.

7. Описати усі рівнобічні трапеції, для яких відношення периметра до кожної сторони трапеції є цілим числом.

Розв'язок: Нехай $a -$ менша основа трапеції, $b -$ її бічна сторона, c — більша основа. Тоді для цілих чисел $\frac{a+2b+c}{b}$, $\frac{a+2b+c}{c}$, $\frac{a+2b+c}{a}$ дістанемо нерівність $\frac{a+2b+c}{c} < \frac{a+2b+c}{a}$. Позначивши $\frac{a+c}{b} = n$, $\frac{a+2b}{c} = k$, $\frac{2b+c}{a} = m$, отримаємо, використавши нерівність трикутника, нерівність $2 \le k < m$. Крім того, $a + 2b = kc$, $2b + c = ma$, $a + c = nb$, тому $a = kc - 2b = bn - c$ і $2b + c = kmc - 2mb$. Звідси отримаємо $\frac{b}{c} = \frac{k+1}{n+2} = \frac{km-1}{2m+2}$, тому $kmn = 2k + 2m + n + 4$ — рівняння для відшукання цілих додатних чисел k, m, n. Оскільки $2 \le k < m$, позначимо $p = k - 1 \ge 1$, $q = m - 1 \ge 1$. Тепер для натуральних чисел n, $p < q$ дістанемо рівняння $n(pq + p + q) = 2p + 2q + 8$. Ясно, що число n не може бути великим. Справді, якщо $n \ge 4$, то вийде нерівність $4pq + 2p + 2q \le 8$, яку можна записати у вигляді $(2p+1)(2q+1) \le 9$. Ця нерівність має єдиний розв'язок $p = q = 1$, що суперечить умові $p < q$. Розглянемо окремо випадки $n = 1, n = 2, n = 3$.

Якщо $n = 1$, вийде $pq + p + q = 2p + 2q + 8$, $(p-1)(q-1) = 9$, звідки єдиний розв'язок $p = 2, q = 10$. Якщо $n = 2$, вийде $2pq + 2p + 2q = 2p + 2q + 8$, тобто $pq=4$, звідки єдиний розв'язок $p=1, q=4$. Якщо ж $n=3$, вийде рівність $3pq+p+q=8$, яка неможлива, бо $p\geq 1, q\geq 2$. Отже, знайдено два набори чисел k,m,n: $k=3, m=11, n=1$ та $k=2, m=5, n=2$. Легко переконатися, що цим двом випадкам відповідають дві рівнобічні трапеції зі сторонами $x,4x,4x,3x$ та $2x,3x,3x,4x$, де $x-$довільне додатне число.

8. Нехай $a=2{,}15\pm 0{,}15$, $b=3{,}55\pm 0{,}25$. Чи правда, що $\frac{ab}{a+b}=1{,}34\pm 0{,}10$?

Розв'язок: Маємо $\begin{cases}2{,}0\leq a\leq 2{,}3\\ 3{,}3\leq b\leq 3{,}8\end{cases}$. Потрібно дізнатися, чи правда, що

$1{,}24\leq \dfrac{ab}{a+b}\leq 1{,}44$?

Зауважимо, що $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, тому послідовно шукаємо потрібні нерівності:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2{,}3}\leq \dfrac{1}{a}\leq \dfrac{1}{2{,}0}\\ \dfrac{1}{3{,}8}\leq \dfrac{1}{b}\leq \dfrac{1}{3{,}3}\end{cases}, \qquad \frac{6{,}1}{2{,}3\cdot 3{,}8}=\frac{1}{2{,}3}+\frac{1}{3{,}8}\leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq \frac{1}{2{,}0}+\frac{1}{3{,}3}=\frac{5{,}3}{2{,}0\cdot 3{,}3},$$

$\dfrac{2{,}0\cdot 3{,}3}{5{,}3}\leq \dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq \dfrac{2{,}3\cdot 3{,}8}{6{,}1}$. Тому $1{,}24<1{,}245...\leq \dfrac{ab}{a+b}\leq 1{,}432...<1{,}44$, отже, умова, вказана в задачі, справджується.

9. Нехай $CD-$бісектриса внутрішнього кута C трикутника ABC. Яких значень може набувати число $\dfrac{BD}{AD}$, якщо $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{5}$?

Розв'язок: Позначимо сторони трикутника: $BC = a, AC = b, AB = c$, тоді з умови задачі випливає, що $c = \frac{3a}{5}$, а з нерівності трикутника дістанемо $\frac{2a}{5} < b < \frac{8a}{5}$. При виконанні такої нерівності трикутник ABC існує і для нього $\frac{2}{5} < \frac{b}{a} < \frac{8}{5}$, отже, число $\frac{b}{a}$ може набувати довільних значень із проміжка $(\frac{2}{5};\frac{8}{5})$. Враховуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника, вийде $\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}$, тому це число може набувати довільних значень із проміжка $(\frac{5}{8};\frac{5}{2})$.

10. Довести, що існує число a, для якого кожне з рівнянь $x^2 - 2012x + 1 = a$ та $x^2 - 2013x - 1 = a$ має два цілих корені. Знайти принаймні одне таке a.

Розв'язок: Аби такі рівняння мали по два цілих корені, необхідно і достатньо, щоб дискримінант першого був квадратом цілого парного числа, а дискримінант другого був квадратом непарного цілого числа. Це випливає із формули для коренів квадратного рівняння.

Дістанемо, що $\begin{cases} 2012^2 - 4 + 4a = m^2 \\ 2013^2 + 4 + 4a = n^2 \end{cases}$. Факт парності цілого числа m і непарності цілого числа n випливає із системи. Віднявши від другого рівняння перше, дістанемо $n^2 - m^2 = 2013^2 - 2012^2 + 8 = 4033$, тобто $(m-n)(m+n) = 4033$. Взявши, наприклад, $n - m = 1, n + m = 4033$, отримаємо $n = 2017, m = 2016$. Тепер із системи рівнянь дістанемо $4a = 2016^2 - 2012^2 + 4 = 2017^2 - 2013^2 - 4$, тому $a = 4029$ – один із розв'язків.

11. Розкласти на множники вираз $x^3 + y^3 - xz^2 + y^2z - 2xyz$.

Розв'язок: Розглянувши поданий вираз як квадратний тричлен відносно z, розкладемо його на множники, розв'язавши рівняння $xz^2 - z(y^2z - 2xy) - x^3 - y^3 = 0$. Дістанемо $D = (2x^2 + y^2)^2$, тому

$$z_1 = \frac{y^2 + x - xy}{x},\ z_2 = -x - y.$$

Звідси й шуканий розклад

$$x^3 + y^3 - xz^2 + y^2z - 2xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 - xy - xz).$$

12. Замінити символи "*" у таблиці

4	14	*
*	*	*
*	*	*

на цілі додатні числа так, щоб усі дев'ять чисел були різними, а усі вісім сум чисел, які стоять у кожному із трьох рядків, кожному з трьох стовпців і обох діагоналей, були однаковими.

Знайти усі розв'язки задачі.

Розв'язок: Позначивши через a центральне число таблиці, а через s — суми вказаних в умові чисел, запишемо послідовно, що суми чисел у першому рядку, обох діагоналях, у першому стовпці, другому рядку і другому стовпці дорівнюють числу s. Вийде таблиця

4	14	$s-18$
$s+a-22$	a	$22-2a$
$18-a$	$s-a-14$	$s-a-4$

.

Прирівнюючи до s суми, що стоять у третьому рядку і третьому стовпці, дістанемо $s = 3a$, тому таблиця набуде вигляду

4	14	$3a-18$
$4a-22$	a	$22-2a$
$18-a$	$2a-14$	$2a-4$

.

Оскільки всі числа таблиці — цілі додатні, то $8 \le a \le 10$. Підставляючи по черзі, $a=8, a=9, a=10$, тільки в одному випадку дістанемо таблицю, в якій усі отримані числа попарно різні:

4	14	12
18	10	2
8	6	16

— єдиний розв'язок задачі.

11 клас

1. Розкласти на множники вираз $x^3+y^3-xz^2+y^2z-2xyz$.

Розв'язок: Розглянувши поданий вираз як квадратний тричлен відносно z, розкладемо його на множники, розв'язавши рівняння $xz^2-z(y^2z-2xy)-x^3-y^3=0$. Дістанемо $D=(2x^2+y^2)^2$, тому $z_1=\dfrac{y^2+x-xy}{x}, z_2=-x-y$. Звідси й шуканий розклад

$$x^3+y^3-xz^2+y^2z-2xyz=(x+y+z)(x^2+y^2-xy-xz).$$

2. Спростити вираз $(x^7+x^6-x^4-x^3-x^2-x-1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$.

Розв'язок: Розкриваючи дужки і скорочуючи, дістанемо

$$x^{13}-x^{10}-x^8+x^5-x^4-x^2-1.$$

3. Знайти внутрішні кути α,β,γ трикутника, для яких справджуються співвідношення $\begin{cases}\sin(2\alpha-\beta)=\sin(2\beta-\gamma),\\ \cos(2\beta+\gamma)=\cos(2\gamma+\alpha).\end{cases}$

Розв'язок: Означення синуса і косинуса дає такі чотири можливі системи рівнянь:

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=2\beta-\gamma+2\pi n,\\ 2\beta+\gamma+2\gamma+\alpha=2\pi m;\end{cases}\qquad \begin{cases}2\alpha-\beta+2\beta-\gamma=\pi+2\pi n,\\ 2\beta+\gamma+2\gamma+\alpha=2\pi m;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=2\beta-\gamma+2\pi n,\\ 2\beta+\gamma=2\gamma+\alpha+2\pi m;\end{cases}\qquad \begin{cases}2\alpha-\beta+2\beta-\gamma=\pi+2\pi n,\\ 2\beta+\gamma=2\gamma+\alpha+2\pi m.\end{cases}$$

Розглянувши друге рівняння перших двох систем, дістанемо $m=1$, бо при $m=2$ вийде $2\beta+3\gamma+\alpha=4\beta+4\gamma+4\alpha$, що неможливо. При $m=1$ дістанемо $2\beta+3\gamma+\alpha=2\beta+2\gamma+2\alpha$, тому $\gamma=\alpha, \beta=\pi-2\alpha$. Тепер із першої системи отримаємо $9\alpha=3\pi+2\pi n$. Тут випадок $n=1$ неможливий, бо тоді $\beta<0$. Отже, $n=0$, і $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. З другої системи отримаємо $\alpha=-2\pi n$, що неможливо при довільному n. Розглянувши друге рівняння останніх двох систем, дістанемо $2\beta=\alpha+\gamma+2\pi m$, звідки $2\beta=\pi-\beta+2\pi m$, тому $3\beta=\pi+2\pi m$, що можливо тільки при $m=0$, отже, $\beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{2\pi}{3}-\alpha$. Тепер з першого рівняння третьої системи вийде $\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, тому отримаємо випадок $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, розглянутий раніше. З першого рівняння четвертої системи вийде $3\alpha=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, звідки $n=0$, бо при $n=1$ вийде $\alpha=\frac{10\pi}{9}$, що неможливо. У випадку $n=0$ дістанемо $\alpha=\frac{4\pi}{9}$, звідки $\gamma=\frac{2\pi}{3}-\alpha=\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{9}=\frac{2\pi}{9}$. Отже, у відповіді до початкової задачі буде правильний трикутник, і ще один трикутник з кутами $\alpha=80^\circ, \beta=60^\circ, \gamma=40^\circ$.

4. Знайти множину всіх значень, яких може набувати функція $y=\frac{x^2-3x}{x^2-6x-3}$.

Розв'язок: Запитання умови можна поставити так: при яких значеннях параметра y рівняння $y(x^2-6x-3)=x^2-3x$ має принаймні один розв'язок? При $y\neq 1$ маємо квадратне рівняння, у якого $D=48y^2-48y+9$, тому відповідь отримаємо з нерівності $D\geq 0$, звідки $y\in(-\infty;\frac{1}{4}]\cup[\frac{3}{4};+\infty)$. Потрібно зауважити, що $y=1$ також належить множині значень функції, бо тоді рівняння буде лінійним і матиме розв'язок $x=-1$.

5. На координатній площині Oxy схематично зобразити множину точок, для координат $(x;y)$ яких справджується рівність $|y|+x^2=\sqrt{|x|-|y|}$.

Розв'язок: Шукана множина симетрична відносно обох осей координат, бо рівність не змінюється при заміні x на $-x$ чи y на $-y$, тому достатньо зобразити її у першій чверті, а потім скористатися симетрією. Матимемо $y+x^2=\sqrt{x-y}$. Зазначене рівносильне системі $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ y^2+(2x^2+1)y+x^4-x=0 \end{cases}$.

Розв'язуючи квадратне рівняння, дістанемо $y=x-x^2$ або $y=-x^2-x-1$. Другий випадок суперечить нерівностям $x\ge 0, y\ge 0$, тому вийде, що $y=x-x^2$, де $0\le x\le 1$ – дуга параболи, що знаходиться у першій чверті. Остаточну відповідь дістанемо із симетрії (вийде крива, схожа на ∞).

6. Описати всі рівнобічні трапеції, для кожної з яких відношення периметра до кожної сторони трапеції є цілим числом.

Розв'язок: Нехай a – менша основа трапеції, b – її бічна сторона, c — більша основа. Тоді для цілих чисел $\frac{a+2b+c}{b},\frac{a+2b+c}{c},\frac{a+2b+c}{a}$ дістанемо нерівність $\frac{a+2b+c}{c}<\frac{a+2b+c}{a}$. Позначивши $\frac{a+c}{b}=n,$ $\frac{a+2b}{c}=k,$ $\frac{2b+c}{a}=m$, отримаємо, використавши нерівність трикутника, нерівність $2\le k<m$. Крім того, $a+2b=kc, 2b+c=ma, a+c=nb$, тому $a=kc-2b=bn-c$ і $2b+c=kmc-2mb$. Звідси отримаємо $\frac{b}{c}=\frac{k+1}{n+2}=\frac{km-1}{2m+2}$, тому

$kmn = 2k + 2m + n + 4$ — рівняння для відшукання цілих додатних чисел k, m, n. Оскільки $2 \le k < m$, позначимо $p = k - 1 \ge 1, q = m - 1 \ge 1$. Тепер для натуральних чисел $n, p < q$ дістанемо рівняння $n(pq + p + q) = 2p + 2q + 8$. Очевидно, що число n не може бути великим. Справді, якщо $n \ge 4$, то вийде нерівність $4pq + 2p + 2q \le 8$, яку можна записати у вигляді $(2p+1)(2q+1) \le 9$. Ця нерівність має єдиний розв'язок $p = q = 1$, що суперечить умові $p < q$. Розглянемо окремо випадки $n = 1, n = 2, n = 3$.

Якщо $n = 1$, вийде $pq + p + q = 2p + 2q + 8$, $(p-1)(q-1) = 9$, звідки єдиний розв'язок $p = 2, q = 10$. Якщо $n = 2$, вийде $2pq + 2p + 2q = 2p + 2q + 8$, тобто $pq = 4$, звідки єдиний розв'язок $p = 1, q = 4$. Якщо ж $n = 3$, вийде рівність $3pq + p + q = 8$, яка неможлива, бо $p \ge 1, q \ge 2$. Отже, знайдено два набори чисел k, m, n: $k = 3, m = 11, n = 1$ та $k = 2,\ m = 5,\ n = 2$. Легко переконатися, що цим двом випадкам відповідають дві рівнобічні трапеції зі сторонами $x,\ 4x,\ 4x,\ 3x$ та $2x,\ 3x,\ 3x,\ 4x$, де x – довільне додатне число.

7. Нехай добутки синусів протилежних внутрішніх кутів опуклого чотирикутника рівні між собою. Чи можна стверджувати, що принаймні якісь дві сторони чотирикутника паралельні?

Розв'язок: Нехай x, y, u, v – послідовні внутрішні кути чотирикутника, тоді за умовою задачі $\sin x \cdot \sin u = \sin y \cdot \sin v.$ Скориставшись відомою формулою, дістанемо $\cos(x - u) = \cos(y - v)$. Це значить, що $x - u = y - v + 2\pi n$ або $x - u + y - v = 2\pi n$ для деякого цілого n. Оскільки x, y, u, v — внутрішні кути опуклого чотирикутника, то $n = 0$ в обох випадках. Отже, $x + v = y + u$ або $x + y = u + v$. У будь-якому разі сума якихось двох послідовних кутів чотирикутника дорівнює 180°. За ознакою паралельності прямих на площині дістанемо, що якісь дві сторони чотирикутника будуть паралельними.

8. При яких значеннях параметра a кожне з рівнянь $x^2-4x-5=a$ та $x^2+7x+2=a$ має по два цілих корені?

Розв'язок: З формули для коренів квадратного рівняння випливає, що дискримінанти обох квадратних рівнянь мають бути квадратами цілих чисел, тому $4a=m^2-36=n^2-41$, де $m,n-$цілі невід'ємні числа. Звідси дістанемо, що $(m+n)(n-m)=5$. Оскільки перший множник більший за другий і обидва вони невід'ємні, отримаємо $m+n=5, n-m=1$, тобто $m=2, n=3$, тому $a=-8$. Залишається перевірити, що при $a=-8$ обидва рівняння справді мають по два цілих корені.

9. Описати всі трикутники з внутрішніми кутами α, β, γ, якщо

$$\sin^2\alpha\cos\alpha=\sin^2\beta\cos\beta=\sin^2\gamma\cos\gamma.$$

Розв'язок: Запишемо умову задачі у вигляді

$$\cos\alpha-\cos^3\alpha=\cos\beta-\cos^3\beta=\cos\gamma-\cos^3\gamma.$$

Ці рівності можна записати у вигляді $f(\cos\alpha)=f(\cos\beta)=f(\cos\gamma)$, де $f(t)=t-t^3,\ t\in(0;1)$. Зауважимо, що $t\in(0;1)$, бо з умови задачі випливає, що шуканий трикутник є гострокутним, тому косинуси його внутрішніх кутів — додатні. Функція $f(t)$ на вказаному проміжку має два проміжки монотонності, а тому серед чисел $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ є принаймні два рівних. Це значить, що шуканий трикутник рівнобічний (для певності вважатимемо, що $\beta=\alpha, \gamma=\pi-2\alpha$), і для відшукання кута α дістанемо рівняння $\sin^2\alpha\cos\alpha=-\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha$, яке рівносильне рівнянню $4\cos\alpha\cos 2\alpha=-1$.

Домноживши ліву і праву його частину на $\sin\alpha\neq 0$, дістанемо рівняння $\sin 4\alpha=-\sin\alpha$, розв'язуючи яке отримаємо $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ або $\alpha=\dfrac{2\pi}{5}$, отже, відповіддю до задачі є трикутники з кутами $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ або $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

10. Нехай 4 і 5 — сторони трикутника, x — його третя сторона, $f(x)$ — косинус середнього за величиною кута трикутника. Побудувати графік $y = f(x)$.

Розв'язок: З нерівності трикутника випливає, що $1 < x < 9$. При цьому, якщо $1 < x \le 4$, середньою за величиною буде сторона 4 і за теоремою косинусів дістанемо $4^2 = x^2 + 5^2 - 10x \cdot f(x)$, тобто $f(x) = \dfrac{x^2+9}{10x}$. Якщо $4 \le x \le 5$, то середньою за величиною буде сторона x і за теоремою косинусів дістанемо $x^2 = 4^2 + 5^2 - 40 f(x)$, тобто $f(x) = \dfrac{41 - x^2}{40}$. Якщо $5 \le x < 9$, то середньою за величиною буде сторона 5 і за теоремою косинусів дістанемо $5^2 = 4^2 + x^2 - 8x \cdot f(x)$, тобто $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{8x}$. Залишається побудувати графік на кожному з проміжків. Якщо $1 < x \le 4$, $f(x) = \dfrac{x^2+9}{10x}$, то $f(x)$ має мінімум $\dfrac{3}{5}$ при $x = 3$, бо $\dfrac{x^2+9}{x} = x + \dfrac{9}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \dfrac{9}{x}} = 6$, тобто $f(x)$ спадає на $(1;3]$ від 1 до $\dfrac{3}{5}$, зростає на $[3,4]$ від $\dfrac{3}{5}$ до $\dfrac{5}{8}$. Якщо $4 \le x \le 5$, $f(x) = \dfrac{41 - x^2}{40}$, то $f(x)$ спадає від $\dfrac{5}{8}$ до $\dfrac{2}{5}$. Якщо $5 \le x < 9$, $f(x) = \dfrac{x^2-9}{8x}$, то $f(x)$ зростає від $\dfrac{2}{5}$ до 1.

11. Замінити символи "*" в таблиці

4	14	*
*	*	*
*	*	*

на цілі додатні числа так, щоб усі дев'ять чисел були різними, а усі вісім сум чисел, які стоять у кожному із трьох рядків, кожному з трьох стовпців і обох діагоналей, були однаковими.

Знайти усі розв'язки задачі.

Розв'язок: Позначивши через a центральне число таблиці, а через s — суми вказаних в умові чисел, запишемо послідовно, що суми чисел у першому рядку, обох діагоналях, у першому стовпці, другому рядку і другому стовпці дорівнюють числу s. Вийде таблиця

4	14	$s-18$
$s+a-22$	a	$22-2a$
$18-a$	$s-a-14$	$s-a-4$

.

Прирівнюючи до s суми, що стоять у третьому рядку і третьому стовпці, дістанемо $s=3a$, тому таблиця набуде вигляду

4	14	$3a-18$
$4a-22$	a	$22-2a$
$18-a$	$2a-14$	$2a-4$

.

Оскільки всі числа таблиці — цілі додатні, то $8 \le a \le 10$. Підставляючи по черзі $a=8, a=9, a=10$, тільки в одному випадку дістанемо таблицю, в якій усі отримані числа попарно різні:

4	14	12
18	10	2
8	6	16

— єдиний розв'язок задачі.

12. Розв'язати рівняння $\sin 36x + \sin 52x = -2$.

Розв'язок: Очевидно, що $\begin{cases} \sin 36x = -1 \\ \sin 52x = -1 \end{cases}$, тому $\begin{cases} 36x = \dfrac{\pi(4n-1)}{2} \\ 52 = \dfrac{\pi(4m-1)}{2} \end{cases}$. Щоб відшукати всі розв'язки останньої системи, потрібно відшукати усі цілі числа m, n, для яких $\dfrac{4n-1}{36} = \dfrac{4m-1}{52}$, тобто $13n - 9m = 1$. Для розв'язання задачі розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} 13n - 9m = 1 \\ 13 \cdot 7 - 9 \cdot 10 = 1 \end{cases}$. Віднявши від першого рівняння друге, дістанемо рівність $13(n-7) = 9(m-10)$, звідки $n - 7 = 9k$ для деякого цілого числа k, а тому $m - 10 = 13k$. Легко пересвідчитись у зворотному: для довільного цілого числа k для чисел $n = 7 + 9k,\ m = 10 + 13k$ буде справджуватися потрібна рівність $13n-9m=1$. Залишається відшукати невідоме $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, де k – довільне ціле число.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з математики настановної сесії Всеукраїнської математичної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

1. Розв'язати рівняння $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 8$.

Розв'язок: До обох частин рівняння додамо вираз $\dfrac{2x^2}{x+1}$. Отримаємо рівняння такого вигляду $\dfrac{x^2(x+2)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x+2)^2}{x+1}$.

Виконавши стандартні перетворення, отримаємо розв'язки рівняння: $x_1 = \quad 2$, $x_2 = 1 \quad \sqrt{3}$ та $x_3 = 1 + \sqrt{3}$.

2. Знайти всі натуральні числа p, для кожного з яких будуть простими всі числа $p, p+12, p+24, p+36, p+48$.

Розв'язок: Очевидно, що число 5 задовольняє умови задачі. Покажемо, що інших не існує. Для цього розглянемо числа, що не діляться на 5: $p = 5k+1$, $p = 5k+2$, $p = 5k+3$, $p = 5k+4$, $k = 1, 2, \ldots$ Якщо $p = 5k+1$, то $p+24$ є складеним. Для $p = 5k+2$ число $p+48$ є складеним, для $p = 5k+3$ складеним буде число $p+12$ і для $p = 5k+4$ буде складеним число $p+36$. Отже, окрім $p = 5$ не існує інших натуральних чисел, для яких задані числа будуть простими.

3. Скільки є п'ятицифрових чисел, які однаково читаються зліва направо і справа наліво (наприклад, 68 786)?

Розв'язок: Розглянемо двоцифрове число, утворене першими двома цифрами того п'ятицифрового числа, що нас цікавить. Усього є 90 таких чисел. Середньою цифрою числа може бути будь-яка з десяти цифр. Останні дві цифри визначаються двома першими. Отже, всього маємо шуканих чисел.

4. Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника, $a \le b \le c$. Чи може виконуватися рівність $\min(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}) = \frac{\sqrt{55}-1}{4}$?

Розв'язок: Знайдемо область можливих значень $t = \min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$, де $a \le b \le c$ — довжини сторін трикутника. Використовуючи нерівність трикутника $c - d < a$ і враховуючи, що t — найменше з чисел $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, отримаємо, що $t \in \left[1; \frac{\sqrt{5}+1)}{2}\right)$. Отже, можливе значення величини $t = \min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$ може дорівнювати $\frac{\sqrt{55}\text{-}1}{4}$.

5. Знайти усі пари дійсних чисел (x, y), які задовольняють нерівність

$$\sin \pi y + x + \sqrt{x - 4y^2 - 4y - 2} \le 0.$$

Розв'язок: Розглянемо підкореневий вираз $x - 4y^2 - 4y - 2 = x - 1 - (2y+1)^2$. Очевидно, що $x \ge 1$. Враховуючи, що $\sin \pi y$ може набувати значень від –1 до 1, отримаємо, що нерівність виконується лише при $x = 1, y = -\frac{1}{2}$.

6. Знайти найбільше і найменше значення виразу $2x^2 - xy - y^2$ за умови, що $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$.

Розв'язок: Нехай $2x^2 - xy - y^2 = a$, тоді задача зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значення a, за яких система $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = a, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 4 \end{cases}$

має розв'язки. Задана система є однорідною відносно лівих частин рівнянь, тому вона зводиться до рівняння з параметром вигляду

$$(8-a)x^2-(4+2a)xy-(4+3a)y^2=0.$$

Розглянувши це рівняння як квадратне відносно змінної $t=\frac{x}{y}$, отримаємо, що для $6-3\sqrt{6}\le a\le 6+3\sqrt{6}$ задане рівняння має розв'язки. Отже, найменше значення $2x^2-xy-y^2$ при умові $x^2+2xy+3y^2=4$ дорівнює $6-3\sqrt{6}$, найбільше значення дорівнює $6+3\sqrt{6}$.

7. Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, де AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — бічні ребра. Через вершину A, середину ребра BC і центр грані DCC_1D_1 проведено площину. Знайти відношення, в якому ця площина поділяє об'єм куба.

Розв'язок: Зробивши відповідну побудову перерізу, отримаємо зрізану прямокутну піраміду $ADMKCN$, де $DM=\frac{2}{3}DD_1$, $CN=\frac{1}{3}CC_1$, ADM — нижня основа, KCM — верхня основа піраміди. Не обмежуючи загальності, виберемо довжину ребра, рівну 1, отримаємо об'єм утвореної піраміди $\frac{7}{36}$. Отже, шукане співвідношення дорівнює $\frac{7}{29}$.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з математики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської математичної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

10 клас

1. Розв'язати рівняння $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$.

Розв'язок: Згрупуємо перший з четвертим та другий з третім множники рівняння. Після ділення всього рівняння на x^2, отримаємо наступне рівняння

$$(x+\frac{24}{x}+14)(x+\frac{24}{x}+11)=4.$$

Зробивши заміну $x+\frac{24}{x}=t$, отримаємо квадратне рівняння, розв'язками якого є $t_1=-4, t_2=1$. Отже, розв'язками початкового рівняння будуть $-4;\quad -6;\ \frac{-15+\sqrt{129}}{2};\quad \frac{-15-\sqrt{129}}{2}$.

2. Визначити найменше значення функції

$$y=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}.$$

Розв'язок: Область визначення функції знаходимо із системи нерівностей $\begin{cases}-x^2+4x+12\geq 0,\\ -x^2+2x+3\geq 0.\end{cases}$

Отримаємо, що $-1\leq x\leq 3$. Неважко перевірити, що, на данній множині визначення, функція $y=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}$ приймає додатні значення.

Розглянемо $y^2=[\sqrt{(x+2)(6-x)}-\sqrt{(x+1)(3-x)}]^2=$

$$=[\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)}]^2+3.$$

Отже, $y^2\geq 3$. Так як $y>0$, то $y\geq\sqrt{3}$.

3. Чи можуть бути послідовними членами геометричної прогресії числа $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, якщо числа $\boldsymbol{ab},\boldsymbol{b}^2,\boldsymbol{c}^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

Розв'язок: Якщо числа $\boldsymbol{ab},\boldsymbol{b}^2,\boldsymbol{c}^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то виконується співвідношення $2\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{c}^2$. Для того, що б числа $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ були послідовними членами геометричної прогресії, потрібно, що б виконувалося співвідношення $\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. Безпосередньою перевіркою, отримаємо позитивну відповідь: числа $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ дійсно будуть послідовними членами геометричної прогресії.

4. Довести, що для $\boldsymbol{a}>0,\boldsymbol{b}>0,\boldsymbol{c}>0$ має місце нерівність

$$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})+\boldsymbol{bc}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})+\boldsymbol{ac}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})\geq 0.$$

Розв'язок: Розкривши дужки в лівій частині нерівності, отримаємо:

$$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{bc}^2+\boldsymbol{ab}^2-2\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{ac}^2+\boldsymbol{bc}^2-2\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}\geq 0.$$

Після групування відповідних доданків, отримаємо очевидну вірну нерівність: $(\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{c}\sqrt{\boldsymbol{b}})^2+(\boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{c}\sqrt{\boldsymbol{a}})^2+(\boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}}-\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{c}})^2\geq 0$.

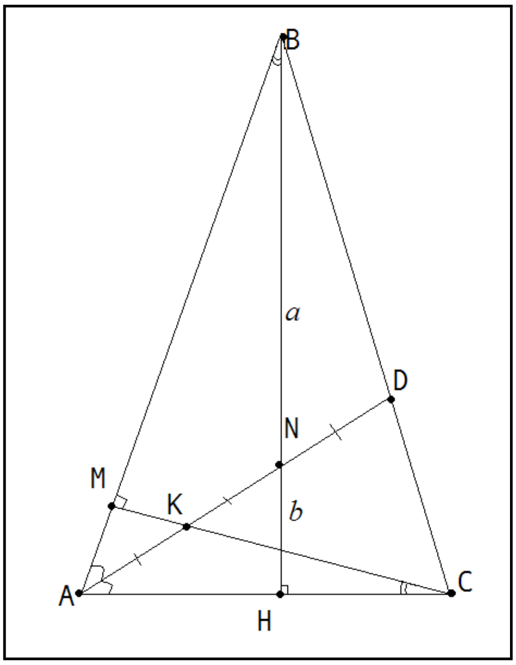
5. Обчислити значення виразу $\sin^4\frac{\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{3\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{5\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{7\boldsymbol{\pi}}{16}$.

Розв'язок: Понизимо степінь доданків і збільшимо аргументи доданків вдвічі. Отримаємо наступну низку перетворень:

$$\sin^4\frac{\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{3\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{5\boldsymbol{\pi}}{16}+\sin^4\frac{7\boldsymbol{\pi}}{16}=\frac{1-2\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{8}+\cos^2\frac{\boldsymbol{\pi}}{8}}{4}+\frac{1-2\cos\frac{3\boldsymbol{\pi}}{8}+\cos^2\frac{3\boldsymbol{\pi}}{8}}{4}+$$

$$+\frac{1+2\cos\frac{3\boldsymbol{\pi}}{8}+\cos^2\frac{3\boldsymbol{\pi}}{8}}{4}+\frac{1+2\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{8}+\cos^2\frac{\boldsymbol{\pi}}{8}}{4}=\frac{1}{4}(4+2\cos^2\frac{\boldsymbol{\pi}}{8}+2\cos^2\frac{3\boldsymbol{\pi}}{8})=\frac{3}{2}.$$

6. Дві висоти трикутника ділять бісектрису внутрішнього кута на три рівних частини. Знайти величину кута трикутника, з якого проведено бісектрису.



Розв'язок: Нехай $BN = a, NH = b$. CM, BH - висоти, AD — бісектриса.

Для трикутника ABH маємо:

$(a+b)^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = x^2$. Тоді отримаємо, що $AB = a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $AH = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. З подібності трикутників ANH і AKM маємо $MK = \frac{b}{2}$, $AM = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. З подібності трикутників AMC і AHB маємо $\frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BD}{DC} = 2$. З трикутника ADC маємо $\frac{HC}{AH} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3} = 1$, $\frac{HC}{AH} = \frac{3}{4}$. Отже, $\cos\angle BAC = \frac{2}{7}$.

7. При яких значеннях параметра a кожне із рівнянь $x^2 - 4x - 5 = a$ та $x^2 + 7x + 2 = a$ має по два цілих корені ?

Розв'язок: Відмітимо, що дискримінанти обох квадратних рівнянь мають бути квадратами цілих чисел, тому $4a = m^2 - 36 = n^2 - 41$, де m, n — цілі невід'ємні числа.

Отримаємо, що $(m+n)(n-m) = 5$. Оскільки перший множник більший за другий і обидва вони невід'ємні, отримаємо $m + n = 5, n - m = 1$. Тобто, $m = 2, n = 3$ і $a = -8$. Залишилося перевірити, що при $a = -8$ обидва рівняння справді мають по два різних цілих корені.

8. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{yz} = 1, \\ \boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{xy} = 3, \\ \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{zx} = 2. \end{cases}$

Розв'язок: Дану систему рівнянь зведемо до системи двох однорідних рівнянь наступним чином: 1) домножемо перше рівняння на $-\boldsymbol{y}$, друге — на $-\boldsymbol{x}$, третє — на $\boldsymbol{z}$ і додамо всі рівняння; 2) домножемо перше рівняння на $-\boldsymbol{z}$, друге — на $\boldsymbol{y}$, третє — на $\boldsymbol{x}$ і додамо всі рівняння. Отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} -3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 0, \\ 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = 0. \end{cases}$

Дана система є однорідною і відповідною заміною ($\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{b}$) зводиться до системи лінійних рівнянь. Отже, розв'язками початкової системи є $\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}; -\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{7}{3\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; -\frac{7}{3\sqrt{2}}\right)$.

9. Знайти трицифрові числа, що дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

Розв'язок: Нехай $\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{abc}} = 100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ число, що необхідно знайти. Згідно умови маємо $\overline{\boldsymbol{abc}} = \boldsymbol{a}! + \boldsymbol{b}! + \boldsymbol{c}!$. Проведемо аналіз лівої та правої частини умови.

1) $7! = 5040$, отже число $\boldsymbol{M}$ не перевищує 666 і жодна з цифр не перевищує 5.

2) Одна з цифр дорівнює 5, бо $4! + 4! + 4! = 72$.

3) $\boldsymbol{a} \le 3$, бо $\overline{\boldsymbol{abc}} \le 5! + 5! + 5! = 360$ (неважко показати, що $\boldsymbol{a} = 1$).

Продовжуючи аналіз для $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, отримаємо, що шукане число $\boldsymbol{M} = 145$.

10. Через точку $\boldsymbol{M}$, яка розташована в середині гострого кута $\boldsymbol{BAC}$, провести пряму, що відтинає трикутник найменшої площі.

Розв'язок: Нехай l — довільна пряма, що проходить через точку M, а N_1 і N_2 — точки перетину цієї прямої зі сторонами кута BAC. Проведемо через точку M пряму g так, щоб сторони кута BAC відтинали на ній відрізок D_1D_2, який точкою M ділиться навпіл. Провівши аналіз отриманої конструкції, отримаємо, що пряма l відтинає від заданого кута трикутник найменшої площі, тоді і тільки тоді, коли точка M буде серединою відрізка N_1N_2.

11. Чи буде число $43^{43} - 17^{17}$ ділитися без остачі на 10?

Розв'язок: Зауважимо, що числа $43^{43} = \left((43)^4\right)^{10} \cdot 43^3$ і $17^{17} = \left((17)^4\right)^4 \cdot 17$ закінчуються цифрою 7. Отже, різниця цих чисел ділиться на 10.

12. Два годинника показують 12 годин дня. Перший поспішає на 8 хвилин, другий відстає на 4 хвилини на добу. Через який час годинникі знову покажуть одночасно 12 годин дня.

Розв'язок: За добу різниця показання годинників збільшується на 12 хвилин. Тому показання обох годинників співпадуть через $\frac{24 \cdot 60}{12} = 120$ діб. За $120n$ діб перший годинник піде вперед на $120 \cdot 8n$ хвилин, тобто на $16n$ годин. Щоб час який показують два годинники був правильним, потрібно щоб $16n$ ділилось на 24. Отже, через $120 \cdot 3 = 360$ діб два годинники будуть однаково показувати 12 годин дня.

11 клас

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136, \end{cases}$

Розв'язок: Застосуємо наступну заміну змінних $x + y = a$, $xy = b$. Тоді враховуючи, що $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} = 20, \\ \boldsymbol{a}^4 - 2\boldsymbol{b} = 136. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь має розв'язок $\boldsymbol{a} = 4, \boldsymbol{b} = 60$. Отже, вихідна система має розв'язки $(6;10), \quad (10;6)$.

2. Чи можуть бути послідовними членами геометричної прогресії числа $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, якщо числа $\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{b}^2, \boldsymbol{c}^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

Розв'язок: Якщо числа $\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{b}^2, \boldsymbol{c}^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то виконується співвідношення $2\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{c}^2$. Для того, що б числа $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ були послідовними членами геометричної прогресії, потрібно, що б виконувалося співвідношення $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{b} \cdot (2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. Безпосередньою перевіркою, отримаємо позитивну відповідь: числа $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ дійсно будуть послідовними членами геометричної прогресії.

3. Визначити найменше значення функції

$$\boldsymbol{y} = \sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} + 12} - \sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 3}.$$

Розв'язок: Область визначення функції знаходимо із системи нерівностей

$$\begin{cases} -\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} + 12 \ge 0, \\ -\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 3 \ge 0. \end{cases}$$

Отримаємо, що $-1 \le \boldsymbol{x} \le 3$. Неважко перевірити, що, на данній множині визначення, функція $\boldsymbol{y} = \sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} + 12} - \sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 3}$ приймає додатні значення.

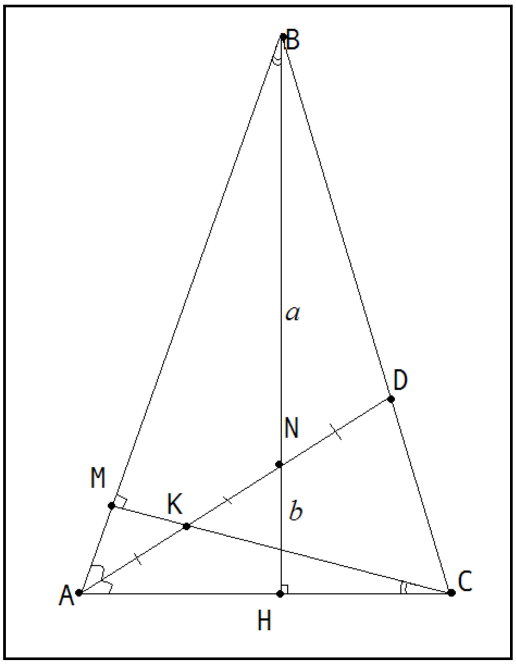
Розглянемо $\boldsymbol{y}^2 = [\sqrt{(\boldsymbol{x}+2)(6-\boldsymbol{x})} - \sqrt{(\boldsymbol{x}+1)(3-\boldsymbol{x})}]^2 =$

$$= [\sqrt{(\boldsymbol{x}+1)(6-\boldsymbol{x})} - \sqrt{(\boldsymbol{x}+2)(3-\boldsymbol{x})}]^2 + 3.$$

Отже, $\boldsymbol{y}^2 \ge 3$. Так як $\boldsymbol{y} > 0$, то $\boldsymbol{y} \ge \sqrt{3}$.

4. Дві висоти трикутника ділять бісектрису внутрішнього кута на три рівних частини. Знайти величину кута трикутника, з якого проведено бісектрису.

Розв'язок: Нехай $BN = a, NH = b$. CM, BH — висоти, AD — бісектриса.



Для трикутника ABH маємо:

$(a+b)^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = x^2$. Тоді отримаємо, що $AB = a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $AH = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. З подібності трикутників ANH і AKM маємо $MK = \frac{b}{2}$, $AM = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. З подібності трикутників AMC AHB маємо $\frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BD}{DC} = 2$. З трикутника маємо $\frac{HC}{AH} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$, $\frac{HC}{AH} = \frac{3}{4}$. Отже, $\cos\angle BAC = \frac{2}{7}$.

5. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки P, Q, R на відрізках AB_1, DC, A_1C_1 відповідно. Відомо, що $AP : AB_1 = 1:3$, $DQ : DC = 2:3$, $A_1R : A_1C_1 = 1:2$. У якому відношенні площина PQR ділить відрізок D_1C_1?

Розв'язок: Проведемо промінь RP і спроектуємо точки R та P на площину основи ABCD, отримаємо відповідно точки R_1 та P_1. За теоремою Фалеса $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP}{BP_1} = \frac{1}{2}$. Через L позначимо точку перетину прямих RP та R_1P_1.

Оскільки R_1 — точка перетину діагоналей квадрата ABCD, і $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{QC}{QD} = \frac{1}{2}$, то за симетрією точки Q, R_1, P_1, L — лежать на одній прямій, і належать шу-

каному перерізу *F*. У перетині *F* з гранню (AA_1BB_1) маємо пряму, що проходить через точки P і P_1. Оскільки за побудовою $PP_1 \perp AB$, то AA_1 паралельна KP_1. Отримаємо, що $\dfrac{A_1K}{B_1K} = \dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{1}{2}$ Проведемо пряму RK. За симетрією вона перетне ребро C_1B_1 в точці N, такій, що $\dfrac{C_1N}{D_1N} = \dfrac{A_1K}{B_1K} = \dfrac{1}{2}$.
З'єднавши точки N та Q отримаємо шуканий переріз. Отже, $\dfrac{C_1N}{C_1D_1} = \dfrac{1}{3}$.

6. При яких значеннях параметра a кожне із рівнянь $x^2 - 4x - 5 = a$ та $x^2 + 7x + 2 = a$ має по два цілих корені?

Розв'язок: Відмітимо, що дискримінанти обох квадратних рівнянь мають бути квадратами цілих чисел, тому $4a = m^2 - 36 = n^2 - 41,$ де m, n — цілі невід'ємні числа.

Отримаємо, що $(m+n)(n-m) = 5$. Оскільки перший множник більший за другий і обидва вони невід'ємні, отримаємо $m + n = 5,\ n - m = 1.$ Тобто, $m = 2,\ n = 3$ і $a = -8$. Залишилося перевірити, що при $a = -8$ обидва рівняння справді мають по два різних цілих корені.

7. Знайти трицифрові числа, що дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

Розв'язок: Нехай $M = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ число, що необхідно знайти. Згідно умови маємо $\overline{abc} = a! + b! + c!$. Проведемо аналіз лівої та правої частини умови.

1) $7! = 5040$, отже число M не перевищує 666 і жодна з цифр не перевищує 5.

2) Одна з цифр дорівнює 5, бо $4! + 4! + 4! = 72$.

3) $a \le 3$, бо $\overline{abc} \le 5! + 5! + 5! = 360$ (неважко показати, що $a = 1$).

Продовжуючи аналіз для b і c, отримаємо, що шукане число $M = 145$.

8. Розв'язати нерівність $\log_{4-x^2}(3-\boldsymbol{x}) \le \log_{4-x^2}(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-2)$.

Розв'язок: Розв'язок даної нерівності буде відповідати розв'язку сукупності двох відповідних систем нерівностей:

$$\begin{cases} 4-\boldsymbol{x}^2>1, \\ 3-\boldsymbol{x}>0, \\ \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-2>0, \\ 3-\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-2 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 0<4-\boldsymbol{x}^2<1, \\ 3-\boldsymbol{x}>0, \\ \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-2>0, \\ 3-\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-2. \end{cases}$$

Перша система має розв'язок $\boldsymbol{x} \in [1;\sqrt{3})$, друга система розв'язків не має. Отже, розв'язком початкової системи буде $\boldsymbol{x} \in [1;\sqrt{3})$.

9. Бічне ребро правильного тетраедра дорівнює $\boldsymbol{a}$. Обчислити площу перерізу тетраедра, що має форму квадрата.

Розв'язок: Для того, щоб в перетині трикутної піраміди з площиною отримати паралелограм, січна площина повинна бути паралельною до двох мимобіжних ребер піраміди. Так як всі ребра піраміди $\boldsymbol{PABC}$ рівні, то кут між мимобіжними ребрами прямий. Щоб утворений переріз був квадратом потрібно, щоб січна площина проходила через середини відповідних ребер. Нехай $\boldsymbol{a}$ — довжина ребра, тоді $\boldsymbol{S}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2}{4}$.

10. Через точку $\boldsymbol{M}$, яка розташована в середині гострого кута $\boldsymbol{BAC}$, провести пряму, що відтинає трикутник найменшої площі.

Розв'язок: Нехай $\boldsymbol{l}$ — довільна пряма, що проходить через точку $\boldsymbol{M}$, а $\boldsymbol{N}_1$ і $\boldsymbol{N}_2$ — точки перетину цієї прямої зі сторонами кута $\boldsymbol{BAC}$. Проведемо через точку M пряму $\boldsymbol{g}$ так, щоб сторони кута $\boldsymbol{BAC}$ відтинали на ній відрізок $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$, який точкою $\boldsymbol{M}$ ділиться навпіл. Провівши аналіз отриманої конструкції, отримаємо, що пряма $\boldsymbol{l}$ відтинає від заданого кута трикутник найменшої площі, тоді і тільки тоді, коли точка $\boldsymbol{M}$ буде серединою відрізка $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$.

11. Порівняти числа $\dfrac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}$ та $\dfrac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$.

Розв'язок: Використаємо наступну властивість дробів: якщо до чисельника і знаменника правильного додатного дробу додати одне й те ж додатнє число, то дріб збільшиться. Дійсно, $\dfrac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{a}}-\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}=\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{a})}>0$, де $0<\boldsymbol{p}<\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a}>0$. Отримаємо,

$$\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}<\frac{10^{2012}+10}{10^{2013}+10}=\frac{10(10^{2011}+1)}{10(10^{2012}+1)}=\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}.$$

12. Два годинника показують 12 годин дня. Перший поспішає на 8 хвилин, другий відстає на 4 хвилини на добу. Через який час годинники знову покажуть одночасно 12 годин дня.

Розв'язок: За добу різниця показання годинників збільшується на 12 хвилин. Тому показання обох годинників співпадуть через $\dfrac{24\cdot 60}{12}=120$ діб. За $120\boldsymbol{n}$ діб перший годинник піде вперед на $120\cdot 8\boldsymbol{n}$ хвилин, тобто на $16\boldsymbol{n}$ годин. Щоб час який показують два годинники був правильним, потрібно щоб $16\boldsymbol{n}$ ділилось на 24. Отже, через $120\cdot 3=360$ діб два годинники будуть однаково показувати 12 годин дня.

Приклади авторських задач з математики дослідницького характеру для слухачів Всеукраїнської математичної очно-заочної школи Малої академії наук України

Розв'язання задач заочного туру містять приховану мету: помітити серед запропонованих задач такі, які дають змогу створити на їхній основі задачі, розв'язання яких можна віднести до наукового дослідження.

Розглянемо такі приклади задач:

1. Спростити вираз $(x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Розв'язок: Можна помітити таку особливість цієї задачі. Результатом обчислення є тотожність, яка містить три многочлени з коефіцієнтами 0, 1 та –1. Крім того, кожен многочлен утворений сумою однієї і тієї самої кількості одночленів — семи. Предметом самостійного дослідження може бути пошук усіх аналогічних рівностей вигляду $f(x) = g(x)h(x)$, де кожен многочлен містить одну і ту саму кількість ненульових одночленів з коефіцієнтами ± 1.

2. Скільки різних натуральних дільників має число 640000000?

Розв'язок: Ця задача допускає відоме узагальнення. Хоча тут немає наукового дослідження, однак формула кількості натуральних дільників числа, розкладеного у добуток простих дільників, не вивчається в загальноосвітній школі, але може бути рекомендована для вивчення.

3. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а площі трикутників ABC, BCD, AOD дорівнюють відповідно $10, 7, 2$. Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

Розв’язок: У цій задачі можна помітити, що поданий чотирикутник є паралелограмом. Тому запитання, яке має бути предметом самостійного дослідження, саме так і можна поставити. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а площі трикутників ABC, BCD, AOD дорівнюють відповідно a,b,c. Якими мають бути ці числа, щоб чотирикутник обов’язково був паралелограмом?

4. Описати всі рівнобічні трапеції, для яких відношення периметра до кожної сторони трапеції є цілим числом.

Розв’язок: У цій задачі узагальнення зовсім природні. По-перше, можна відмовитися від рівнобічності трапеції, тобто ставити запитання про пошук усіх трапецій, для яких відношення периметра до кожної сторони трапеції є цілим числом. По-друге, можна ставити запитання пошуку всіх 4-кутників з указаною властивістю. По-третє, можна ставити запитання пошуку всіх n-кутників із вказаною властивістю (очевидно, що остання задача гарантовано є складною).

5. Довести, що існує число a, для якого кожне з рівнянь $x^2 - 2012x + 1 = a$ та $x^2 - 2013x - 1 = a$ має два цілих корені. Знайти принаймні одне таке a.

Розв’язок: У цій задачі можна ставити запитання про те, для яких аналогічних квадратних рівнянь з параметром запропонований алгоритм ефективно дає змогу відшукати принаймні одне значення параметра, а то й знайти їх усі.

6. Розкласти на множники вираз $x^3 + y^3 - xz^2 + y^2z - 2xyz$.

Розв’язок: Маючи знайдений розклад, можна поставити запитання, схожі на запитання до першої задачі.

7. Замінити символи "*" у таблиці

4	14	*
*	*	*
*	*	*

на цілі додатні числа так, щоб усі дев'ять чисел були різними, а усі вісім сум чисел, які стоять у кожному із трьох рядків, кожному з трьох стовпців і обох діагоналей, були однаковими. Знайти усі розв'язки задачі.

Розв'язок: Особливістю задачі є те, що задано два числа (4 і 14), які стоять у певних місцях квадрата, і ці цілі числа однозначно визначають квадрат. Природно поставити, наприклад, запитання про пошук усіх таких пар чисел (a,b), щоб існувала єдина таблиця

a	b	*
*	*	*
*	*	*

з властивостями, вказаними в умові задачі.

8. Знайти внутрішні кути α, β, γ трикутника, для яких справджуються співвідношення $\begin{cases} \sin(2\alpha-\beta)=\sin(2\beta-\gamma), \\ \cos(2\beta+\gamma)=\cos(2\gamma+\alpha). \end{cases}$

9. Описати усі трикутники з внутрішніми кутами α, β, γ, якщо

$$\sin^2\alpha\cos\alpha=\sin^2\beta\cos\beta=\sin^2\gamma\cos\gamma.$$

Розв'язок: Особливістю задач 8 і 9 є той факт, що відповідь до кожної з них містить правильний трикутник і рівно ще один трикутник. Цей факт є достатньо дивним, зважаючи на те, що друга задача симетрична, а перша — ні. Отже, предметом самостійного дослідження може бути пошук усіх (з деякого природного класу) симетричних або несиметричних співвідношень для внутрішніх кутів трикутника, які є правильними для правильного трикутника і для ще якогось одного трикутника («родича» правильного).

10. Розв'язати рівняння $\sin 36x + \sin 52x = -2$.

Розв'язок: Запропоноване рівняння вимагає, наприклад, навичок аналізу лінійного діофантового рівняння з двома невідомими. Очевидно, що можна вигадати аналогічні тригонометричні рівняння чи системи рівнянь, які зводяться до одного лінійного діофантового рівняння з більшою кількістю невідомих чи до системи лінійних діофантових рівнянь. Це змусить дослідника або вивчити відомі методи дослідження згаданих математичних об'єктів, або навести цікаві приклади їхнього застосування.

На завершення можна сказати, що задачі, які допускають деяке, можливо, навіть істотне узагальнення, є у багатьох відомих збірниках задач. Неодноразово такі задачі були і серед задач, які пропонувались учасникам МАНівських змагань раніше. Важливо їх не пропустити і досягти успіху в роботі.

Бажаємо успіхів!

ЗМІСТ

Формат 60 × 84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м^2.

Видавництво: ТОВ «Праймдрук»
01023, м. Київ, вул. Еспланадна, 20, офіс 213

Свідоцтво про внесення
до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серія ДК № 4222 від 07.12.2011.