Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна академія наук України
Національний центр «Мала академія наук України»

Т. В. ПЕЩЕРІНА
Л. М. ЗАСЄДКА
В. М. КРАВЧЕНКО
О. В. БОРИСЕНКО

ВСЕУКРАЇНСЬКА ФІЗИКО-ТЕХНІЧНА ОЧНО-ЗАОЧНА ШКОЛА (2012–2013 навчальний рік)

Збірник навчально-методичних матеріалів

Київ 2013

Рекомендовано науково-методичною радою
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 1 від 20.01.2013)

Т. В. Пещеріна, Л. М. Засєдка, В. М. Кравченко, О. В. Борисенко Всеукраїнська фізико-технічна очно-заочна школа Малої академії наук України (2012–2013 н. р.). Збірник навчально-методичних матеріалів / [за ред. О. В. Лісового]. — К., 2013. — 71 с.

Збірник підготовлений відповідно до навчальної програми Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи.

Видання містить:

- контрольні завдання;
- методичні рекомендації та розв’язки різних типів задач з математики;
- приклади авторських задач дослідницького характеру.

Збірник адресований учасникам Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи, а також на допомогу іншим учням для підготовки до контрольних робіт з фізики та математики у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України.

Шановні старшокласники!

Одним із пріоритетів діяльності Малої академії наук України є розвиток наукових напрямів фізико-математичного і технічного профілів, який потребує повноцінного забезпечення ефективним і сучасним лабораторним та навчально-методичним інструментарієм. З цією метою Мала академія наук України активно працює над створенням лабораторно-дослідницького комплексу «МАНлаб», на базі якого послідовно здійснює реалізацію ряду науково-освітніх проектів, серед яких — Всеукраїнські профільні очно-заочні школи Малої академії наук України.

Одним із головних завдань проекту є формування інтерактивного освітнього середовища, забезпечення умов для проведення досліджень, в тому числі в дистанційному режимі, що сприяє розширенню цільової учнівської аудиторії.

Навчально-виховний процес у профільних школах здійснюється за спеціально розробленими програмами і навчальними планами, які органічно поєднують колективну та індивідуальну форми роботи і містять такі змістовні модулі: «Основи дослідницької роботи», «Профільний навчальний курс», «Організація індивідуальної дослідницької діяльності слухачів».

На сьогодні для формування науково-дослідницьких завдань у профільних очно-заочних школах використовуються навчальне та наукове цифрове обладнання українських виробників та світових брендів, а саме: німецької компанії ***«PHYWE»***, ізраїльської компанії ***«Fourier»***, американської компанії ***«Celestron»***, японської компанії ***«Tokyo Boeki Technology Ltd».***

Креативність змісту навчання передбачає також навчально-розвивальнії програми, що спрямовані на формування і розвиток інтелектуальних умінь, комунікативних здібностей, навичок самоуправління й самоорганізації, необхідних для творчої самореалізації учнів.

До викладання в школах залучаються науковці НАН України, науково-педагогічні працівники вищих навчальних закладів, педагогічні працівники МАН України, відомі діячі науки, техніки та культури держави.

Узагальнюючи досвід роботи Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи, науковцями — Людмилою Засєдкою, вчителем Технічного ліцею НТУУ «КПІ», кандидатом фізико-математичних наук, Заслуженим учителем України, Владиславом Кравченком, доцентом кафедри експериментальної фізики фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка, кандидатом фізико-математичних наук та Ольгою Борисенко, доцентом фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ», кандидатом фізико-математичних наук підготовлено цей збірник, у якому представлені завдання, методичні рекомендації та розв’язки різних типів задач з фізики та математики, а також приклади авторських задач дослідницького характеру для слухачів фізико-технічної школи на 2012–2013 н. р.

За допомогою збірника ви маєте змогу самостійно вирішити завдання з математики та фізики, перевірити свій рівень знань і долучитися до науково-дослідницької діяльності.

Пещеріна Тетяна Вікторівна,
заступник директора з навчально-виховної роботи
Національного центру «Мала академія наук України»

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з математики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Борисенко О. В.

1. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{6+7x-3x^2}}{-3x^2+2x+8}}+\sqrt[6]{\frac{4}{(x+1)^3\cdot(x+5)^2\,x^4}}.$$

Розв'язування: задача зводиться до системи

$$\begin{cases}6+7x-3x^2\ge 0\\ -3x^2+2x+8>0\\ x+1>0\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(x-3)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\le 0\\ 3(x-2)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)<0\\ x>-1\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left[-\dfrac{2}{3};3\right]\\ x\in\left(-\dfrac{4}{3};2\right)\\ x\in(-1;+\infty)\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-\frac{2}{3};0)\cup(0;2).$$

2. Обчислити $\dfrac{1}{\sin 10^o}-4\sin 70^o$.

Розв'язування: $\dfrac{1}{\sin 10^o}-4\sin 70^o=$

$$=\frac{2\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}-4\cos 20^\circ=\frac{2\cos 10^\circ-4\cos 20^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\cos 10^\circ-2\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{2(\sin 80^\circ-\sin 40^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{4\sin 20^\circ\cdot\cos 60^\circ}{\sin 20^\circ}=2.$$

3. Довести, що $a+b$ ділиться на 11 (без остачі) при умові, що $2+a$ і $35-b$ діляться на 11 (без остачі).

Розв'язування: розглянемо $(2+a)$ — $(35-b)=(a+b)-33$, звідки $(a+b)=$ $=(2+a)$ — $(35-b)$ + 33, де кожний із доданків ділиться на 33 без остачі.

4. Розв’язати рівняння $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24}$.

Розв’язування: рівняння існує при умові, коли

$$\begin{cases} x^2+3x+2\neq 0 \\ x^2+5x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\notin\{-2;-1\} \\ x\notin\left\{\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\right\} \end{cases}.$$

Розділимо чисельник і знаменник кожного дробу лівої частини рівняння на $x\neq 0$.

Будемо мати $\frac{1}{x+3+\frac{2}{x}}-\frac{1}{x+5+\frac{2}{x}}=\frac{1}{24}$, зробимо заміну $x+\frac{2}{x}=t$, тоді

$$\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t+5}=\frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{24(t+5)-24(t+3)-(t+3)(t+5)}{24(t+3)(t+5)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+8t-33=0 \\ t\notin\{-3;-5\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-11 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}=-11 \\ x+\frac{2}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+11x+2=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right., (x\neq 0) \Leftrightarrow x\in\left\{1;2;\frac{-11\pm\sqrt{113}}{2}\right\}.$$

5. Знайти $3x$, якщо $\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{9}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{45}-\sqrt{20}}$.

Розв’язування: $\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{9}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{45}-\sqrt{20}} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}=$

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{5}+1 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\sqrt{5}+1 \Leftrightarrow 3x+2=2(5-1) \Leftrightarrow 3x=6.$$

6. Знайти всі пари цілих чисел $(x;y)$, які задовольняють умові: $x^2=y^2+2y+13$.

Розв’язування: виділимо повний квадрат відносно y і розкладемо на множники:

$x^2=y^2+2y+13 \Leftrightarrow x^2-(y+1)^2=12 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+1)=12$. Знайдемо всі цілі x і y, для яких виконуються умови: 1) $\begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y+1=12 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x-y-1=12 \\ x+y+1=1 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y+1=-12 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x-y-1=-12 \\ x+y+1=-1 \end{cases}$, 5) $\begin{cases} x-y-1=3 \\ x+y+1=4 \end{cases}$, 6) $\begin{cases} x-y-1=-3 \\ x+y+1=-4 \end{cases}$,

7) $\begin{cases} x-y-1=4 \\ x+y+1=3 \end{cases}$, 8) $\begin{cases} x-y-1=-4 \\ x+y+1=-3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x-y-1=6 \\ x+y+1=2 \end{cases}$, 10) $\begin{cases} x-y-1=-6 \\ x+y+1=-2 \end{cases}$, 11) $\begin{cases} x-y-1=2 \\ x+y+1=6 \end{cases}$,

12) $\begin{cases} x-y-1=-2 \\ x+y+1=-6 \end{cases}$, неважко розв'язати системи і переконатись, що тільки у випадках 9– 12 будемо мати цілі значення x і y, а саме

$$(x,y)\in\{(4;-3),(4;1),(-4;1),(-4;-3)\}.$$

7. Різниця між висотою, опущеною на бічну сторону рівнобедреного трикутника, і висотою, опущеною на основу, дорівнює 4 см. Обчислити площу трикутника, якщо бічна сторона його і основа відносяться як 5 : 6.

Розв'язування: розглянемо трикутник ABC. Позначимо висоту, опущену на основу AC, $h_2 = BK$, а висоту, опущену на бічну сторону — $h_1 = AM$. Тоді $h_1 - h_2 = 4$.

$S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot h_2 = \frac{1}{2}BC\cdot h_1$, звідки $\frac{AC\cdot h_2}{BC\cdot h_1}=1$ або $\frac{6\cdot h_2}{5\cdot h_2}=1$. Маємо систему

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = 4 \\ 6h_2 = 5h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h_1 = 24 \\ h_2 = 20 \end{array}\right..$$

Тоді $\frac{AC}{BC}=\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{BC^2-h_1^2}}{BC}=\frac{6}{5} \Rightarrow BC=30$, а $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h_2=\frac{1}{2}30\cdot 20=300\,(\text{см}^2)$.

8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-4x-12} > 2x+9$.

Розв'язування: подана нерівність зводиться до сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+9\ge 0 \\ x^2-4x-12 > 4x^2+36x+81 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+9<0 \\ x^2-4x-12\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -\frac{9}{2} \\ 3x^2+40x+93<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x< -\frac{9}{2} \\ x\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-\frac{9}{2};+\infty) \\ x\in\left(-\frac{31}{3};-3\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty;-\frac{9}{2}) \\ x\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3).$$

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з фізики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

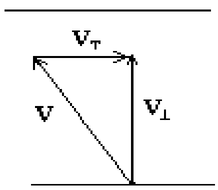
Секція «Технічні науки»

Засєдка Л. М.

10 клас

1. Рибалка перепливає річку так, що його траєкторія перпендикулярна до берега. Швидкість рибалки втричі більша за швидкість річки і дорівнює 3 м/с. За який час він перепливе річку, ширина якої 50 м?

Розв'язування: Щоб траєкторія була перпендикулярна, швидкість рибалки має бути напрямлена під деяким кутом до берега. За теоремою Піфагора знайдемо $v=\sqrt{v^2-v_т^2}=2\sqrt{2}$ м/с. Час перепливання річки $t=\frac{S}{v}$ =17,67 с.



2. Рух тіла в системі СІ описується рівнянням $x = 2 + 6t — 3t^2$. Який шлях пройшло тіло за перші 3 с руху?

Розв'язування: Швидкість тіла змінюється за законом $v = 6 - 6t$. Отже, тіло зупиниться через 1 с. У цей момент часу координата дорівнює $x_1 = 2 + 6\cdot 1 - 3\cdot 1^2 = 5$ м. Враховуючи, що початкова координата 2 м, шлях до зупинки становить 3 м. Через 3 с після початку руху координата тіла дорівнює $x_3 = 2 + 6\cdot 3 - 3\cdot 3^2 = -7$ м. Шлях, пройдений тілом, — $S = 3 + 5 + 7 = 15$ м.

3. Тіло почало гальмувати і через 2 с зупинилося, пройшовши гальмівний шлях 24 м. Яку швидкість мало тіло, подолавши 75% цього шляху?

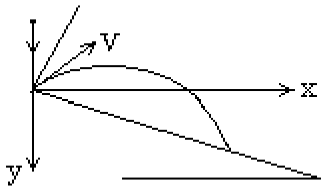
Розв'язування: При такому гальмуванні середня швидкість руху становить 12 м/с. Вважаючи рух тіла рівносповільненим, знаходимо початкову швидкість $v_о = 24$ м/с. Запишемо відому формулу $v^2 - v_0^2 = 2aS$ для випадку, коли тіло повністю загальмувало і коли пройшло 75% гальмівного шляху.

4. З висоти 20 м горизонтально кинули тіло так, що дальність польоту виявилася вдвічі більшою за висоту. Якою була швидкість тіла через 1 с польоту?

Розв'язування: Початкова швидкість тіла напрямлена горизонтально, отже, рух по вертикальній осі відбувається без початкової кості. За формулою $h=\frac{gt^2}{2}$ обчислюємо час руху тіла до землі: t = 2 с. Дальність польоту

$S = 2h$ = 40 м. Знайдемо початкову швидкість тіла: $v = \frac{s}{t}$ = 20 м/с. Під час усього польоту горизонтальна швидкість тіла не змінюється і дорівнює 20 м/с, вертикальна швидкість змінюється за законом $v_y = gt$. Через 1 с руху вертикальна складова швидкості дорівнює 10 м/с. За теоремою Піфагора знаходимо модуль швидкості $v=\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$=$\sqrt{500}$= 22,36 м/с.

5. Пролетівши вертикально вниз без початкової швидкості 5 м, тіло абсолютно пружно відбивається від довгої похилої площини, що становить з горизонтом кут 30°. Через який час відбудеться друга зустріч тіла з похилою площиною?



Розв'язування: Знайдемо швидкість, з якою тіло вдаряється об похилу площину $v = \sqrt{2gh}$= 10 м/с. Від похилої площини тіло відлітає з такою самою по модулю швидкістю під кутом 30° до горизонту (кут падіння дорівнює куту відбивання, кути рахуються від перпендикуляра, встановленого до похилої площини). Рівняння руху тіла має вигляд $x = vcos\alpha t,\ y = -vsin\alpha t + \frac{gt^2}{2}$. Тіло потрапляє на похилу площину, якщо $tg\alpha = \frac{y}{x}$. Підставляючи рівняння руху, після перетворень отримаємо: $t = \frac{2vsin\alpha}{g}$= 2 с.

6. Автомобіль рухається із швидкістю 36 км/год. Скільки обертів роблять його колеса за 5 хв, якщо зовнішній діаметр покришок коліс 60 см?

Розв'язування: Швидкість 10 м/с. 5 хв = 300 с. За 5 хв автомобіль проїхав відстань 3000 м. За один оберт коліс автомобіль долає відстань $2\pi R = 1{,}884$. Кількість обертів за 5 хв — N = 1592.

11 клас

1. З гелікоптера, що піднімається рівномірно вгору зі швидкістю 10 м/с, на висоті 100 м випадає предмет. Якою буде відстань між предметом і гелікоптером через 5 с?

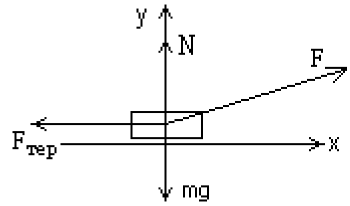
Розв'язування: Баласт випадає з гелікоптера на висоті 100 м. Якщо цей момент часу взяти за початковий, то рівняння гелікоптера має вигляд: $y_1 = 100 + vt = 100 + 10t$. Швидкість тіла зразу після того, як він випав, дорівнює швидкості гелікоптера і напрямлена вертикально вгору. Запишемо рівняння руху для тіла $y_2 = 100 + 10t - \frac{gt^2}{2}$. Відстань між гелікоптером і тілом

$$\Delta y = y_1 - y_2 = \frac{gt^2}{2} = 125 \text{ м.}$$

2. Вага тіла в ліфті, що рухається вертикально, збільшується в порівнянні з вагою в нерухомому ліфті на 50%. З яким прискоренням рухається ліфт?

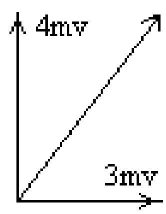
Розв'язування: Вага — це сила, з якою тіло (людина) тисне на опору. За третім законом Ньютона вага тіла за модулем дорівнює силі реакції опори. Запишемо другий закон Ньютона: $ma = N - mg$, $ma_2 = mg - N_2$. За умовою $N = 1{,}5mg$. Знаходимо прискорення $a = 5$ м/с^2.

3. Санчата масою 40 кг рівномірно рухаються по горизонтальній поверхні під дією сили, що напрямлена під кутом 30^o до горизонту. Визначити величину цієї сили, якщо коефіцієнт тертя санчат об поверхню 0,3.



Розв'язування: Оскільки санчата рухаються рівномірно, то сума всіх сил дорівнює нулю. Запишемо другий закон Ньютона в проекціях на горизонтальну і вертикальну вісі. *Ox*: $0 = F\cos\alpha - \mu N$, *Oy*: $0 = F\sin\alpha + N - mg$. З другого рівняння знаходимо N і, підставляючи в перше рівняння, знаходимо силу $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 120$ Н.

4. Тіло масою *m*, рухаючись зі швидкістю 3v, непружно стикається з тілом удвічі більшої маси, що рухалось у перпендикулярному напрямку зі швидкістю 2v. З якою швидкістю будуть рухатися тіла після зіткнення?



Розв'язування: За законом збереження імпульсу, імпульс системи тіл до взаємодії дорівнює імпульсу системи після взаємодії. Імпульс до взаємодії знайдемо за теоремою Піфагора: $p_1 = \sqrt{(4m\mathrm{v})^2 + (3m\mathrm{v})^2} = 5m\mathrm{v}$. Після взаємодії загальна маса дорівнює $3m$, а швидкість v_2. За законом збереження імпульсу $5m\mathrm{v} = 3m\mathrm{v}_2$. Знаходимо швидкість після зіткнення $\mathrm{v}_2 = \dfrac{5}{3} = 1{,}67$ м/с.

5. Матеріальна точка коливається за гармонійним законом із частотою 100 Гц і амплітудою 1 см. Який шлях проходить точка за 1 с? Знайдіть максимальну та середню швидкість точки за період.

Розв'язування: Якщо тіло робить одне коливання, то воно проходить шлях, що дорівнює чотирьом амплітудам $S_1 = 4A$. За 1 с тіло робить 100 коливань, отже, проходить шлях, рівний $S = 400A = 400$ см. Середня швидкість руху $\mathrm{v}_{сер} = 4$ м/с. Максимальна швидкість при коливальному русі

$$\mathrm{v}_{макс} = \omega A = 2\pi\nu A = 6{,}28 \text{ м/с}.$$

6. Яку роботу необхідно виконати, щоб вирити колодязь глибиною 5 м? Площа перерізу колодязя 1 м^2, густина землі 4 г/см^3.

Розв'язування: Коли землю піднімають на деяку висоту, то виконана робота йде на збільшення потенціальної енергії викопаної землі. $A = \frac{mgh}{2}$. Не вся земля піднімається з глибини 5 м, тому взята середня глибина колодязя $\frac{h}{2}$. Уся маса землі знаходиться так: $m = \rho S h = 20\ 000$ кг. $A = \frac{mgh}{2} = 5.10^5$ Дж.

Завдання, методичні вказівки та розв’язки до очної контрольної роботи з математики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Борисенко О. В.

10–11 клас

1. Обчислити а) $\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}$, б) $\sqrt{13+\sqrt{48}}-2\sqrt{3}$.

Розв’язування:

а) $\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\;=\;\sqrt[4]{\left(3+\sqrt{8}\right)\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt[4]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{9-8}=1$ або

іншим способом: $\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}==\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=1.$

б) $\sqrt{13+\sqrt{48}}-2\sqrt{3}=\sqrt{1+2\cdot2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{3}=\left|1+2\sqrt{3}\right|-2\sqrt{3}=1$.

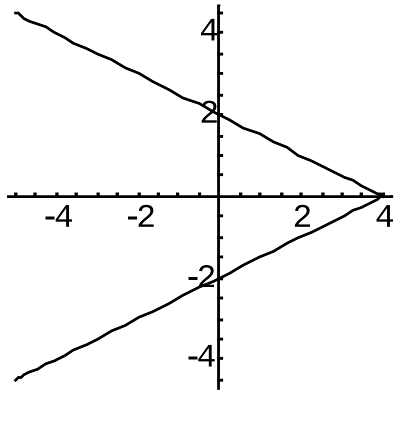
2. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt[4]{x+3}}}$.

Розв’язування: Задача зводиться до розв’язування системи

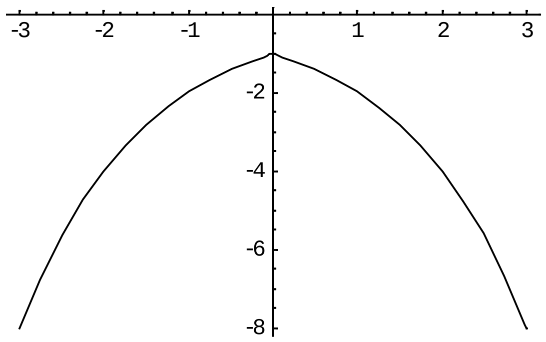
$$\begin{cases}x^2-2x-8\ge 0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-2\;]\cup[4;+\infty)\\ x\in(-3;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-3;-2\;]\cup[4;+\infty).$$

3. Побудувати графіки а) $x+2|y|=4$, б) $y=-2^{|x|}$.

Розв’язування: а) Можна розглянути два випадки: $y\ge 0$ і $y<0$, тоді у верхній півплощині будуємо графік прямої $x+2y=4$ або $y=-\dfrac{1}{2}x+2$, а у нижній — $x-2y=4$ або $y=\dfrac{1}{2}x-2$.



б) Відразу потрібно відмітити, що функція є парною; можна побудувати графік, використавши перетворення, тобто спочатку побудувати графік функції $y=2^x$, потім $y=2^{|x|}$ (графік, що відповідає $x\geq 0$, дзеркально відображаємо відносно осі oy) і остаточно — $y=-2^{|x|}$ (дзеркальне відображення відносно осі ox).



4. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2<0$ на проміжку $[-8;+8]$.

Розв'язування: $(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2<0 \Leftrightarrow (x-2)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2>0$.

Використавши «метод інтервалів», отримаємо $x\in[-8;-5)\cup(-5;-3)\cup(2;8]$. Вибираємо цілі значення: –8, –7, –6, –4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, тобто маємо десять цілих розв'язків.

5. Розв'язати нерівність $x\sqrt{2-x}>\cos x\cdot\log_{\sin x}2\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язування: Подана нерівність визначена, коли виконуються такі умови:

$$\begin{cases}\sin x>0\\ \sin x\neq 1\\ 2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(2\pi k;\pi+2\pi k),k\in Z\\ x\neq 2\pi n,n\in Z\\ x\leq 2\end{cases}$$

. Оскільки $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, а $\log_{\sin x}1=0$, то нерівність зводиться до $x\sqrt{2-x}>0$, звідки $x>0$ і $x\neq 2$. Врахувавши область визначення нерівності, будемо мати: $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};2\right)$.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з фізики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Засєдка Л. М.

10-11 клас

1. Дерев'яний кубик має масу 200 г. Маса куба зі стороною вдвічі меншою із цього самого дерева

А	Б	В	Г
100 г	50 г	25 г	немає правильної відповіді

Розв'язування: Які б розміри куба не були, густина залишається незмінною. $\frac{m_1}{a^3} = \frac{m_2}{(a/2)^3}$. Очевидно, що $m_2 = m_1/8$ = 25 г. Правильна відповідь В.

2. Кухонна стіна 2×2 м^2 була обкладена кахельною плиткою. Якщо розміри плитки — 20 см на 30 см, то мінімальна кількість використаних плиток

А	Б	В	Г
67	70	73	немає правильної відповіді

Розв'язування: Коли стіну обкладають кахлем, то використовують або цілі плитки, або відрізають зайве. Для стіни необхідно взяти по горизонталі 10 штук, по вертикалі 7 штук. Усього 70 плиток (якщо хороший майстер). Рішення, як $n = \frac{4}{0{,}06} = 67$ не підходить! Правильна відповідь Б.

3. Мурашка, що наближається до дзеркала зі швидкістю 5 см/с, до свого зображення наближається зі швидкістю

А	Б	В	Г
5 см/с	10 см/с	2,5 см/с	немає правильної відповіді

Розв'язування: Зображення наближається до дзеркала зі швидкістю 5 см/с. Отже, мурашка до свого зображення наближається зі швидкістю 10 см/с. Правильна відповідь Б.

4. Якщо дві третини шляху пройдено зі швидкістю 40 км/год, а решту — зі швидкістю вдвічі меншою, то середня швидкість руху тіла

А	Б	В	Г
від 25 до 27 км/год	від 32 до 35 км/год	30 км/год	немає правильної відповіді

Розв'язування: Пам'ятаємо, що середня швидкість руху завжди знаходиться як весь шлях поділити на весь час руху. Для поданої задачі $v = \dfrac{S}{\dfrac{2S}{3 \cdot 40} + \dfrac{S}{3 \cdot 20}} = 30$ км/год. Правильна відповідь В.

5. Вільно падаючи, за першу секунду тіло пролетіло 5 м. За другу секунду тіло пролетить шлях

А	Б	В	Г
5 м	15 м	25 м	немає правильної відповіді

Розв'язування: Шлях, пройдений тілом при рівноприскореному русі, знаходиться за формулою (початкова швидкість дорівнює нулю) $S = \dfrac{at^2}{2}$. Якщо $t_1 = 1$ с, то $S_1 = 5$ м. Шлях, пройдений за 2 с, буде в 4 рази більшим, тобто $S_2 = 20$ м. За другу секунду тіло пролетіло шлях 15 м. Правильна відповідь Б.

6. Тіло, кинуте вертикально вгору, на висоті 15 м було через 1 та 3 с. Максимальна висота підйому

А	Б	В	Г
25 м	20 м	не вистачає даних для рішення	немає правильної відповіді

Розв'язування: Максимальної висоти тіло досягло через 2 с польоту, отже, і падати вниз воно теж буде 2 с і за цей час пролетить $y = \dfrac{gt^2}{2} = 20$ м.

Правильна відповідь Б.

7. Тіло масою 100 г рухається за законом $x = 9 - 4t + t^2$. Зміна швидкості тіла через 4 с від початку руху

А	Б	В	Г
8 м/с	12 м/с	–4 м/с	немає правильної відповіді

Розв'язування: Початкова швидкість тіла –4 м/с, прискорення 2 м/с^2. Через 4 с від початку руху швидкість тіла дорівнюватиме 4 м/с. Зміна швидкості становить 8 м/с. Правильна відповідь А.

8. Автомобіль рухається із швидкістю 10 м/с. Скільки обертів роблять його колеса за 10 хв, якщо зовнішній діаметр покришок коліс 60 см?

А	Б	В	Г
менше 2000	більше 4000	від 2000 до 3000	від 3001 до 4000

Розв'язування: 10 хв = 600 с. За 10 хв автомобіль проїхав відстань 6000 м. За один оберт коліс автомобіль проходить відстань $2\pi R = 1{,}884$ м. Кількість обертів за 10 хв N = 3185. Правильна відповідь Г.

9. Якщо тіло кинути вертикально вгору зі швидкістю 10 м/с, то кінетична енергія тіла буде дорівнювати його потенціальній енергії на висоті

А	Б	В	Г
5 м	10 м	2,5 м	немає правильної відповіді

Розв'язування: За законом збереження енергії:
$\frac{m\text{v}^2}{2} = E_{кін} + E_{пот} = 2E_{пот} = 2mgh$. $h = \frac{\text{v}^2}{4\text{g}} = 2{,}5$ м. Правильна відповідь В.

10. Тіло коливається з частотою 5 Гц і амплітудою 1 см. Шлях, пройдений тілом за 1 хв, дорівнює

А	Б	В	Г
3 м	6 м	12 м	немає правильної відповіді

Розв'язування: Якщо тіло робить одне коливання, то воно проходить шлях, що дорівнює чотирьом амплітудам $S_1 = 4A$. За 1 хв тіло робить 300 коливань, отже, проходить шлях, рівний $S = 1200A = 1200$ см. Правильна відповідь В.

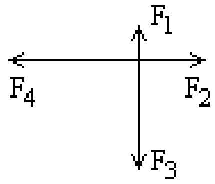
11. Тіло масою 1 кг кинули зі швидкістю 20 м/с під кутом 60° до горизонту. Швидкість тіла на висоті 5 м дорівнює

А	Б	В	Г
10 м/с	15 м/с	17 м/с	немає правильної відповіді

Розв'язування: За законом збереження енергії: $\frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{m\text{v}_2^2}{2} + mgh$. Підставляючи числові значення, отримаємо $\text{v}_2 = \sqrt{300} = 17$ м/с. Кутом не скористалися при рішенні задачі, але він необхідний для оцінки: чи досягло тіло висоти 5 м? Для поданої задачі максимальна висота становить 15 м. Правильна відповідь В.

12. На тіло діють чотири сили, а саме: 1 Н, 2 Н, 3 Н, 4 Н. Вони лежать в одній площині, кут між двома сусідніми становить 90°. Сума всіх цих сил дорівнює

А	Б	В	Г
10 Н	4 Н	2,5 Н	немає правильної відповіді



Розв'язування: З графічного зображення сил стає очевидним порядок додавання сил: спочатку додаємо сили, що діють по одній прямій. F_{13} = 2 Н, F_{24} = 2 Н. Далі додаємо взаємно перпендикулярні сили відповідно до теореми Піфагора $F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{24}^2} = 2\sqrt{2}$ = 2,8 Н. Правильна відповідь Г.

13. Вага залізного куба масою 5 кг у воді дорівнює

А	Б	В	Г
менше 5 кг	більше 5 кг	5 кг	немає правильної відповіді

Розв'язування: Вага — це сила, з якою тіло тисне на опору або розтягує підвіс. Відповіді А, Б, В не підходять тому, що одиниця кг — це одиниця маси, а не сили. Правильна відповідь Г.

14. Супутник, що перебуває на навколоземній орбіті, не падає на поверхню Землі тому, що

А	Б	В	Г
рухається за інерцією	не діють жодні сили	діє сила тяжіння, але вона дуже мала	немає правильної відповіді

Розв'язування: Будемо міркувати «від противного». А: за інерцією тіло рухається рівномірно і прямолінійно (на тіло не діють жодні сили), а на орбіті тіло рухається по колу. Б: на орбіті на тіло діють сили (наприклад сила тяжіння). В: сила тяжіння на навколоземній орбіті (радіус орбіти мало відрізняється від радіуса Землі) мало відрізняється від сили тяжіння на поверхні Землі. Отже, твердження А, Б, В є неправильними. Правильна відповідь Г.

15. Якщо віддалитися від поверхні Землі на відстань, що дорівнює радіусу Землі, то сила тяжіння

А	Б	В	Г
збільшиться вдвічі	зменшиться вдвічі	не зміниться	немає правильної відповіді

Розв'язування: Згідно із законом всесвітнього тяжіння, $mg = G\frac{mM}{R^2}$. На відстані $2R$ від центра Землі сила тяжіння зменшується у 4 рази. Правильна відповідь Г.

16. Жорсткість банківської гуми довжиною 10 см дорівнює 40 Н/м. Якщо взяти банківську гуму довжиною 5 см, то жорсткості такої гуми дорівнює

А	Б	В	Г
80 Н/м	40 Н/м	16 Н/м	немає правильної відповіді

Розв'язування: Жорсткість гуми або дротини залежить від довжини і площі перерізу. В таблицях наведений модуль Юнга, який зв'язаний із жорсткістю співвідношенням $E = \frac{kl}{S}$. Однак навіть не знаючи цього можна міркувати так: якщо довжину гуми зменшити вдвічі, то її жорсткість вдвічі збільшується, тому що її важче розтягувати. За умовою задачі, довжину гуми зменшили у 2 рази, тому жорсткість збільшиться у 2 рази і буде дорівнювати 80 Н/м. Правильна відповідь А.

17. Якщо на тіло, що рухається по поверхні, зверху поставити таке саме тіло, то коефіцієнт тертя

А	Б	В	Г
збільшиться вдвічі	не зміниться	зменшиться	немає правильної відповіді

Розв'язування: Не зміниться, тому що коефіцієнт тертя визначається властивостями поверхні, які труться (наприклад якістю обробки).

18. Якщо мотузку з двох боків тягнути із силою по 50 Н, то динамометр, закріплений у центрі, покаже силу натягу мотузки

А	Б	В	Г
50 Н	0 Н	100 Н	немає правильної відповіді

Розв'язування: 50 Н. Пропонуємо перевірити це експериментально.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з математики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Борисенко О. В.

10–11 клас

1. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(a^2-3a+2\right)\cdot x^2-\left(a^2-5a+4\right)\cdot x = a^2-a$ має більше двох коренів?

Розв'язування: Рівняння має більше двох коренів, коли виконана така система: $\begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ a^2-5a+4=0 \\ a^2-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\{2;1\} \\ a\in\{4;1\} \\ a\in\{0;1\} \end{cases} \Leftrightarrow a=1$.

Відповідь: $a=1$.

2. Розв'язати тригонометричну нерівність $\sin^6 x+\cos^6 x \ge \frac{5}{8}$.

Розв'язування: Проведемо такі перетворення в лівій частині нерівності

$$\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3 \ge \frac{5}{8} \Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)\ge\frac{5}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\ge\frac{5}{8} \Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\ge\frac{5}{8} \Leftrightarrow \sin^2 2x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow 2x\in\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right] \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in Z.$$

Відповідь: $x\in\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in Z$.

3. Знайти всі m, при яких не має розв'язків система рівнянь

$$\begin{cases} m^2x+(2-m)y=m^3+4 \\ mx+(2m-1)y=m^5-2 \end{cases}.$$

Розв'язування: Система лінійних рівнянь із двома невідомими не має розв'язків, коли виконується умова: $\frac{m^2}{m}=\frac{2-m}{2m-1}\ne\frac{m^3+4}{m^5-2}$. При $m\notin\left\{0;\frac{1}{2};\sqrt[5]{2}\right\}$ $m=\frac{2-m}{2m-1}\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$.

Підставимо знайдені значення m у вираз $\frac{m^3+4}{m^5-2}$, при $m=1$ маємо –5, а при $m=-1$ маємо -1, тобто значення $m=-1$ не задовольняє умову .

Відповідь: $m=1$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1}$.

Розв'язування: Областю визначення поданого рівняння буде

$$x-1>0 \Rightarrow x\in(1;+\infty).$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{x-1}\\ x>2\end{cases}\\ \begin{cases}2=\dfrac{1}{x-1}\\ 1<x\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Відповідь: $x=\frac{3}{2}$.

5. Дано дві вершини рівностороннього трикутника $A(-2;2), B(-2;-4)$. Знайти координати третьої вершини C та площу цього трикутника.

Розв'язування: Оскільки перші координати точок A і B збігаються і трикутник ABC рівносторонній, то точка C має другу координату $y=-1$.

Знайдемо довжину сторони AB: $|AB|=\sqrt{(-2+2)^2+(2+4)^2}=6$. $|AB|=6=|AC|=\sqrt{(x_c+2)^2+(y_c-2)^2} \Rightarrow 6=\sqrt{(x_c+2)^2+9} \Rightarrow (x_c+2)^2=27 \Rightarrow x_c+2=\pm3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x_c=-2\pm3\sqrt{3}$, а точка $C\left(-2\pm3\sqrt{3};-1\right)$. Площу трикутника знайдемо за формулою $S=\frac{1}{2}|AB|^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ кв. од.

Відповідь: $C\left(-2\pm3\sqrt{3};-1\right)$, $S_{\vartriangle ABC}=9\sqrt{3}$.

6. Дано трикутник, сторони якого дорівнюють 4 см, 8 см, 9 см. Знайти довжину бісектриси, яка проведена до більшої сторони.

Розв'язування: Розглянемо трикутник ABC. Нехай $|AB|=4$, $|AC|=8$, $|BC|=9$. Проведемо бісектрису AK до сторони BC. Позначимо $|BK|=x$, тоді $|KC|=9-x$.

Використаємо властивість бісектриси: $\frac{x}{9-x}=\frac{4}{8}$, звідки $x=3$. Позначимо довжину бісектриси $|AK|=y$, а кут $\angle A=2\alpha$ $(\angle BAK=\angle KAC=\alpha)$. Розглянемо $\triangle ABC$: $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABK}+S_{\triangle KCA}$ або $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot y\cdot \sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot y\cdot \sin\alpha$, звідки $y=\frac{16\cos\alpha}{3}$.

За теоремою косинусів $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2-2|AB|\cdot|AC|\cdot\cos 2\alpha$, звідки $\cos 2\alpha=\frac{4^2+8^2-9^2}{2\cdot 4\cdot 9}=-\frac{1}{64}$. Із формули $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ маємо $\cos^2\alpha=\frac{63}{2\cdot 64}\Rightarrow$ $\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}$ і $y=\frac{16\cdot 3\cdot\sqrt{7}}{3\cdot 8\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{14}$.

Відповідь: $\sqrt{14}$.

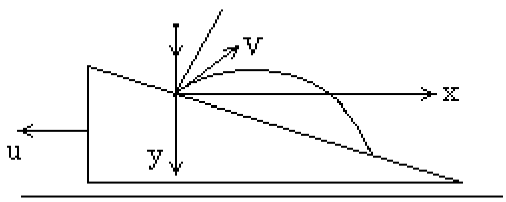
Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Засєдка Л. М.

1. Пролетівши вертикально вниз 5 м, кулька абсолютно пружно вдаряється в клин, що лежить на гладенькій горизонтальній поверхні з кутом нахилу до горизонту 30°. Через який час відбудеться друге зіткнення кульки з клином? Маса клина у 5 разів більша за масу кульки.

Розв'язування: Визначимо швидкість кульки перед ударом у клин: $V=\sqrt{2gh}=10$ м/с. Після відбиття від клина кулька летить під кутом 30° до горизонту. В горизонтальному напрямку (вісь Ox) рух кульки рівномірний, у вертикальному напрямі (вісь Oy) — рівноприскорений. Клин теж починає рухатися з постійною швидкістю в горизонтальному напрямку. Запишемо закон збереження імпульсу по осі Ox: $0=mV\cos\alpha-5mu$. $u=\frac{V\cos\alpha}{5}$. Відносно клина куля рухається по



осі Ox зі швидкістю $V_1=V\cos\alpha+u=\frac{6V\cos\alpha}{5}$. Рівняння руху для кульки (система координат жорстко зв'язана з клином): $X=V_1t=\frac{6V\cos\alpha}{5}t$, $Y=-Vt\sin\alpha+\frac{gt^2}{2}$. Умова того, що кулька знову попадає на клин — $tg\alpha=\frac{Y}{X}=\frac{5(-Vt\sin\alpha+\frac{gt^2}{2})}{6Vt\cos\alpha}$. $t=\frac{2V\sin\alpha}{5g}=\frac{2\sqrt{2gh}\sin\alpha}{5g}$. $t=0{,}2$ с.

2. Тіло починає падати з висоти 100 м. На якій висоті кінетична енергія тіла вдвічі менша за потенціальну в цій точці?

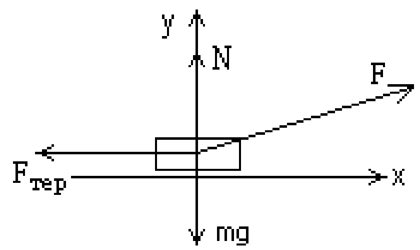
Розв'язування: За законом збереження механічної енергії $E_1=E_2=$ $=E_{кін}+E_{пот}=1{,}5E_{пот}$. E_1– початкова енергія тіла на висоті h_1=10 м, E_2 — енергія тіла на шуканій висоті h_2. У цій точці $E_{кін}=\frac{1}{2}E_{пот}$. Остаточно маємо $mgh_1=1{,}5mgh_2$, звідки $h_2=\frac{h_1}{1{,}5}$= 66,7 м.

3. Тіло масою m, рухаючись зі швидкістю V, пружно стикається з тілом удвічі більшої маси, що рухалося назустріч зі швидкістю 3V. З якою швидкістю будуть рухатися тіла після зіткнення?

Розв'язування: Запишемо закон збереження імпульсу та механічної енергії для кульок: $mV - 2m3V = mu_1 + 2mu_2$, $\frac{mV^2}{2} + \frac{2m(3V)^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{2mu_2^2}{2}$.

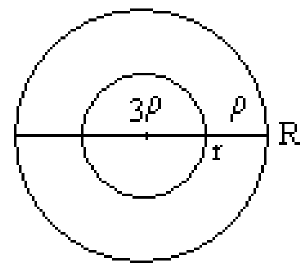
Розв'язок системи рівнянь дає відповідь задачі: $u_1 = \frac{-13V}{3}$, $u_2 = \frac{-V}{3}$. При розв'язуванні квадратного рівняння з'являється ще одне рішення $u_1 = V$, $u_2 = -3V$, але воно не узгоджується з умовою задачі, оскільки перша кулька не може перескочити через другу кульку, щоб продовжувати рух в тому самому напрямку, що й до зіткнення.

4. Санчата масою 40 кг рівномірно рухаються горизонтальною поверхнею під дією сили, що напрямлена під кутом 30^o до горизонту. Визначити роботу кожної сили при переміщенні санчат на 10 м, якщо коефіцієнт тертя санчат об поверхню 0,2.



Розв'язування: За другим законом Ньютона сума всіх сил, що діють на санчата, дорівнює нулю (рух рівномірний): $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} + \vec{F} = 0$. Проекція на осі Ox та Oy дає такі рівняння: $N - mg + F\sin\alpha = 0$, $F\cos\alpha - F_{тер} = 0$. Враховуючи, що $F_{тер} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$, отримаємо рівняння для сили F: $F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$ = 82,5 Н. Знайдемо всі інші сили, що діють на санчата: $mg =$400 Н, $N = mg - F\sin\alpha =$ 358,75 Н, $F_{тер} =$71,75 Н. Робота кожної сили: $A_N = 0$, $A_{mg} = 0$, $A_F = FS\cos 30^o =$717,5 Дж, $A_{тер} = F_{тер}S\cos 180^o =$–717,5 Дж.

5. Визначити першу космічну швидкість для планети радіуса R, якщо вона складається з ядра, радіусом удвічі меншим за радіус планети, а густиною втричі більшою, ніж густина верхнього шару ρ.



Розв'язування: Супутник обертається навколо планети з першою космічною швидкістю $V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Це легко отримати, якщо написати другий закон Ньютона для супутника, що під дією сили всесвітнього тяжіння рівномірно рухається по колу, а отже, з доцентровим прискоренням: $m\frac{V^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$. Наша задача — визначити масу планети. Можна зробити це двома способами.

Спосіб 1 (стандартний, але не цікавий):

$$M = \frac{4\pi}{3}3\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{4\pi}{3}\rho\left(R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right) = \frac{4\pi}{3}\frac{10\rho R^3}{8}.$$

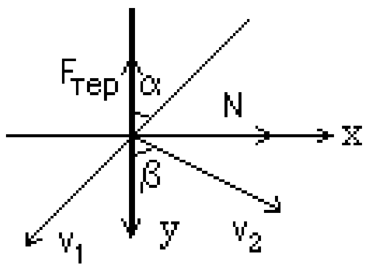
Спосіб 2 (метод суперпозиції): планету можна представити як дві вкладені одна в одну. Перша — густиною ρ, радіусом R. Друга планета густиною 2ρ (бо одне ρ уже враховано) і радіусом $\frac{R}{2}$. Сумарна маса цих двох складових (уявних планет) дорівнює їх сумі

$$M = \frac{4\pi}{3}2\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \frac{4\pi}{3}\frac{5\rho R^3}{4}.$$

Обидва способи дають один результат, отже, для першої космічної швидкості маємо $V = R\sqrt{\frac{5\pi\rho G}{3}}$.

6. Хокейна шайба вдаряється у вертикальний борт льодового майданчика під кутом 30° до його поверхні, рухаючись горизонтально по поверхні льоду зі швидкістю 90 км/год. Визначити її швидкість після відбиття, якщо коефіцієнт тертя між бортом і бічною поверхнею шайби 0,1.

Розв'язування: Позначимо початкову швидкість шайби через V_1, а швидкість після відбиття через V_2. По осі *Ox* діє сила реакції опори N (борт льодового майданчика — по осі *Oy*). Вона змінює проекцію швидкості по осі *Ox* на протилежну без зміни модуля проекції $V_{2x} = V_{1x} = V\sin\alpha$. Запишемо другий закон Ньютона



$$m\frac{V_{2x} - (-V_{1x})}{t} = N, \text{ або } m\frac{2V\sin\alpha}{t} = N.$$

По осі *Oy* діє сила тертя і зменшує проекцію швидкості на цю вісь $m\frac{V_{2y} - V_{1y}}{t} = -\mu N$. Враховуючи, що $V_{1y} = V\cos\alpha$, знайдемо V_{2y}, враховуючи, що силу реакції опори можна підставити з попереднього рівняння: $V_{2y} = V(\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha)$. За теоремою Піфагора знайдемо швидкість після відбиття $V_2 = \sqrt{V_{2y}^2 + V_{2x}^2}$, $V_2 = V\sqrt{1 - 4\mu\sin\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$ = 22,86 м/с, або 82,3 км/год. Змінюється кут відбиття від борта майданчика

$$tg\beta = \frac{V_{2x}}{V_{2y}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha} = \frac{1}{ctg\alpha - 2\mu} = 2{,}65. \ \beta = 77^{\circ}.$$

Вказівки
до виконання заочної контрольної роботи з фізики
дослідницько-експериментальної сесії

Задача 1. Скористайтеся законом збереження енергії і знайдіть швидкість кульки перед ударом об клин. Визначте швидкість кульки і клина після зіткнення (скористайтеся законом збереження імпульсу). Виберіть систему координат і запишіть рівняння руху. Скористайтесь тим, що $tg\alpha = \frac{y(t)}{x(t)}$. Знайдіть час до другого зіткнення.

Задача 2. Запишіть закон збереження механічної енергії для початку руху і в момент, коли кінетична енергія тіла вдвічі менша за потенціальну.

Задача 3. При пружному зіткненні виконуються закони збереження імпульсу та кінетичної енергії (висота тіл у полі тяжіння Землі не змінюється, тому потенціальна енергія кожного тіла залишається сталою). Система двох рівнянь із двома невідомими дає розв'язання задачі. Уважно подивіться на отримане рішення. Чи всі розв'язки системи є фізично коректними?

Задача 4. Розставте всі сили, що діють на санчата. Запишіть другий закон Ньютона, врахувавши, що рух рівномірний. Виберіть зручну систему координат і спроектуйте векторне рівняння на осі. Скористайтесь тим, що $F_{\text{тер}} = \mu N$, знайдіть значення сили реакції опори та величину сили, з якою тягнуть санчата. Визначте роботу кожної з прикладених до санчат сил (їх чотири). Врахуйте правильно кут між силою і переміщенням. (Санчата — не літак. Вони рухаються горизонтально і від землі не відриваються).

Задача 5. Рух супутника навколо планети — рух по колу, радіус якого можна вважати рівним радіусу планети (орбіта мінімального радіуса), зі швидкістю, що по модулю не змінюється. Отже, рух супутника — це рух із доцентровим прискоренням. Запишіть другий закон Ньютона. Сила, що діє на супутник, — сила всесвітнього тяжіння. Залишається тільки знайти масу планети. Скористаємося відомою з 7-го класу формулою $m = \rho V$ і відомою формулою з геометрії для визначення об'єму сфери: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Задача 6. При ударі на шайбу діє сила тяжіння і сила реакції льодового майданчика, які не вносять ніяких змін у рух шайби. Рух шайби змінюють сили з боку борта: сила реакції опори, яка змінює перпендикулярну проекцію швидкості на протилежну, і сила тертя, яка зменшує проекцію швидкості на лінію борта. Записавши другий закон Ньютона в імпульсній формі, врахувавши зв'язок між силою реакції опори і силою тертя, знайдіть швидкість після удару. Не забудьте, що проекції швидкостей додаються за теоремою Піфагора. Після відбиття кут відльоту кульки зміниться, тому що одна з проекцій стала меншою.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з математики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Борисенко О. В.

10–11 клас

1. Розв'язати тригонометричне рівняння $2(1+\cos 2x)^{-1} = 3tg^2 x - 1$.

Розв'язування: рівняння має зміст, коли $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$$2(1+\cos 2x)^{-1} = 3tg^2 x - 1 \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x\right)^{-1} = 3tg^2 x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 3tg^2 x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + tg^2 x = 3tg^2 x - 1 \Leftrightarrow tg^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z.$$

2. Розв'язати тригонометричне рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

Розв'язування: $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \sin 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -3 \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

3. Розв'язати тригонометричне рівняння $4\sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5$.

Розв'язування: врахувавши область зміни тригонометричної функції, будемо мати умову існування поданого рівняння $-4 \leq 4x^2 - 4x + 5 \leq 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \\ 4x^2 - 4x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 \leq 0 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; тобто маємо єдине значення x, яке задовольняє подане рівняння.

4. Розв'язати тригонометричну нерівність $\cos 2x + 5\sin x + 2 \geq 0$.

Розв'язування: $\cos 2x + 5\sin x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5\sin x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 \geq 0$, введемо заміну $\sin x = t, |t| \leq 1$, тоді будемо мати квадратну нерівність $2t^2 - 5t - 3 \leq 0$, звідки

$$\Rightarrow \begin{cases} t \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \\ t \in [-1;1] \end{cases} \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right], k \in Z\ .$$

5. Який кут (у градусах) утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}+2\vec{b}$ і $5\vec{a}-4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язування: з умови задачі маємо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Оскільки вектори $\vec{a}+2\vec{b}$ і $5\vec{a}-4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, їх скалярний добуток буде дорівнювати нулю, тобто

$$(\vec{a}+2\vec{b})(5\vec{a}-4\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-8\vec{b}^2=0 \quad 5|\vec{a}|^2+6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)-8|\vec{b}|^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+6\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)-8=0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60^\circ\ .$$

6. Знайти суму всіх розв'язків нерівності $(x+15)\cdot(x-10)\cdot\sqrt{9x-x^2}\ge 0$.

Розв'язування: знайдемо множину значень незалежної змінної, при якій нерівність існує $9x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x(x-9)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;9]$.

$$(x+15)\cdot(x-10)\cdot\sqrt{9x-x^2}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;9] \\ (x+15)(x-10)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;9] \\ x\in(-\infty;-15]\cup[10;+\infty) \end{cases},$$

звідки робимо висновок, що розв'язок нерівності не потрапляє в область існування нерівності, тому тільки значення $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=9 \end{array}\right.$ задовольняють вихідну умову, а сума всіх розв'язків буде дорівнювати 9.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Технічні науки»

Засєдка Л. М.

1. Тіло починає рухатися рівноприскорено і за другу секунду проходить шлях 12 м. Який шлях тіло пройде за перші три секунди руху?

А	Б	В	Г
36 м	20 м	42 м	немає правильної відповіді

Розв'язок: Необхідно пам'ятати, що шлях за дві секунди і за другу секунду руху різні. Шлях за дві секунди: $S_2 = \frac{at^2}{2} = \frac{a2^2}{2}$. Шлях за другу секунду знаходимо, як шлях за дві секунди відняти шлях за першу секунду руху: $S_{2-1} = \frac{a2^2}{2} - \frac{a1^2}{2} = \frac{3a}{2}$. Знаходимо прискорення $12 = \frac{3a}{2}$, $a = 8$ м/с^2. Шлях за перші 3 с руху дорівнює $S_3 = \frac{at^2}{2} = \frac{8 \cdot 3^2}{2} = 36$ м. Правильна відповідь А.

2. Рівняння руху матеріальної точки $x = 4 + 4t - t^2$. Швидкість через 2 с від початку руху

А	Б	В	Г
2 м/с	0 м/с	–2 м/с	немає правильної відповіді

Розв'язок: Рух тіла рівнозмінний (спочатку рівносповільнений до моменту зупинки, потім рівноприскорений) з початковою швидкістю 2 м/с і прискоренням –2 м/с^2. Швидкість тіла змінюється за законом $V = V_o + at = 2 - 2t$. Через 2 с від початку руху швидкість дорівнює –2 м/с. Знак «–» означає, що її напрям змінився і швидкість напрямлена проти осі *Ox*. Правильна відповідь В.

3. Період обертання велосипедного колеса радіусом 0,3 м дорівнює 0,2 с. З якою швидкістю рухається велосипедист?

А	Б	В	Г
менше 1,5 м/с	6,28 м/с	більше 9 м/с	немає правильної відповіді

Розв'язок: За 1 с колесо робить 5 обертів. $N = \frac{t}{T}$. За час одного оберту кожна точка колеса торкнулася поверхні землі, отже, колесо просунулося вперед на відстань $S_1 = 2\pi R$. За 5 обертів колесо проїде $S_5 = 10\pi R =$ 9,42 м. Швидкість 9,42 м/с. Правильна відповідь В.

4. Під дією сили 2 Н перше тіло рухається з прискоренням 2 м/с^2. Друге тіло рухається з прискоренням 3 м/с^2 під дією сили 3 Н. З яким прискоренням будуть рухатися ці тіла, якщо їх з'єднати і прикласти силу 5 Н?

А	Б	В	Г
2 м/с^2	2,5 м/с^2	5 м/с^2	немає правильної відповіді

Розв'язок: За другим законом Ньютона: $F_1 = m_1 a_1$, $F_2 = m_2 a_2$, $F_3 = (m_1 + m_2) a_3$. Маси тіл знаходимо з перших двох рівнянь і підставляючи у третє отримаємо: $F_3 = (\frac{F_1}{a_1} + \frac{F_2}{a_2}) a_3$. Підставляючи відомі величини, знаходимо $a_3 =$2,5 м/с^2. Правильна відповідь Б.

5. Якщо тіло рухається під дією сили, що перпендикулярна швидкості, то рух тіла

А	Б	В	Г
прискорений по колу	по колу	рівносповільнений	немає правильної відповіді

Розв'язок: Сила, що перпендикулярна швидкості, не може змінити швидкість по модулю, але змінює її за напрямком. Правильна відповідь Б.

6. Тіло масою 1 кг розтягує гумовий шнур на 50 см. Жорсткість гуми дорівнює

А	Б	В	Г
0,5 Н/м	50 Н/м	2 Н/м	немає правильної відповіді

Розв'язок: За законом Гука $F = kx$. Жорсткість гуми 20 Н/м. Правильна відповідь Г.

7. Якщо до стандартного тягарця масою 100 г, що коливається на пружині, приєднати ще три таких само тягарці, то частота коливань

А	Б	В	Г
збільшиться	зменшиться	не зміниться	немає правильної відповіді

Розв'язок: Період коливань тіла на пружині $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. При збільшенні маси тягарця у 4 рази період коливань збільшується в 2 рази. Частота $\nu = \frac{1}{T}$, відповідно, у 2 рази зменшиться. Правильна відповідь Б.

8. Щоб підняти відро з водою масою 10 кг з колодязя глибиною 10 м, необхідно виконати роботу

А	Б	В	Г
100 Дж	1000 Дж	10 Дж	немає правильної відповіді

Розв'язок: $A = FS = mgh =$ 1000 Дж. Правильна відповідь Б.

9. Ідеальний газ міститься в балоні. У скільки разів зміниться його тиск, якщо температуру газу збільшують від 20 ^oC до 120 ^oC?

А	Б	В	Г
збільшиться в 6 разів	зменшиться в 6 разів	збільшиться в 1,3 раза	немає правильної відповіді

Розв'язок: У задачі порівнюються параметри стану ідеального газу при температурах $T_1 = 293$ К та $T_2 = 393$ К. За рівнянням стану ідеального газу $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$. Враховуючи, що газ міститься в балоні ($V = const$), маємо: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{393}{293} = 1{,}34$. Правильна відповідь В.

10. Скільки атомів гідрогену в краплі води масою 0,18 мг? Відносна атомарна маса оксигену 8, гідрогену 1. Число Авогадро 6,10^{23} моль$^{-1}$.

А	Б	В	Г
від 10^{19} до 10^{20}	більше 10^{20}	$6\cdot 10^{18}$	немає правильної відповіді

Розв'язок: $v = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$. Знаходимо кількість молекул води $N = \frac{m}{\mu}N_A =$ $= 6\cdot 10^{18}$. Одна молекула води містить 2 атоми гідрогену, тому загальна кількість атомів гідрогену $12\cdot 10^{18}$. Правильна відповідь А.

11. Для нагрівання води від 0 ^oC до 20 ^oC потрібно 480 Дж теплоти. Скільки теплоти потрібно для подальшого нагрівання цієї кількості води до температури кипіння (100 ^oC)? Питома теплоємність води 4200 Дж/кг^oC.

А	Б	В	Г
4800 Дж	4200 Дж	1920 Дж	немає правильної відповіді

Розв'язок: $Q_1 = cm\Delta T_1$. При нагріванні води від 0 до 20 ^oC, ΔT_1= 20, а при нагріванні води від 20 ^oC до 100 ^oC, $\Delta T_2 = 80$ ^oC. Очевидно, що кількість теплоти збільшиться у 4 рази. Правильна відповідь В.

12. Процес нагрівання ідеального газу без надання йому теплоти називається

А	Б	В	Г
ізотермічним	ізобаричним	ізохоричним	немає правильної відповіді

Розв'язок: Процес називається адіабатним. Правильна відповідь Г.

13. При послідовному з'єднанні двох однакових гірлянд споживана потужність при освітленні ялинки, порівняно з потужністю, що споживається однією гірляндою,

А	Б	В	Г
зростає	зменшується	не змінюється	немає правильної відповіді

Розв'язок: Очевидним є факт, що гірлянди вмикаються у джерело постійної напруги. У наших оселях це стандартна напруга 220 В. Нехай гірлянда має опір R. Споживана нею потужність $P=\frac{U^2}{R}$. Якщо дві гірлянди з'єднати послідовно, то опір збільшиться у 2 рази, а отже, споживана потужність зменшиться у 2 рази. Правильна відповідь Б.

14. Як зміниться електроємність конденсатора, якщо напругу на його обкладках збільшити вдвічі?

А	Б	В	Г
збільшиться вдвічі	зменшиться вдвічі	не зміниться	немає правильної відповіді

Розв'язок: За означенням $C=\frac{q}{U}$, але напругу можна збільшити на конденсаторі лише при збільшенні заряду на його обкладках. Електроємність конденсатора визначається його розмірами. Для плоского конденсатора $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_o S}{d}$. Правильна відповідь В.

15. Якщо нерухомий заряд розмістити в магнітному полі, то він почне рухатися

А	Б	В	Г
рівноприскорено	рівномірно	по колу	немає правильної відповіді

Розв'язок: Сила Лоренца, що діє на заряджену частинку в магнітному полі, $F=qVB\sin\alpha$. Якщо швидкість заряду дорівнює нулю, то сила з боку магнітного поля теж дорівнює нулю. Нерухома заряджена частинка не почне рухатися. Правильна відповідь Г.

16. При переході світлового променя з повітря у воду незмінною характеристикою світлової хвилі залишається

А	Б	В	Г
частота хвилі	довжина хвилі	швидкість	немає правильної відповіді

Розв'язок: Правильна відповідь А.

17. Якщо максимальна сила струму через котушку індуктивності 1 мА, а на електроємності 200 мкФ максимальна напруга 1 В, то енергія електромагнітних коливань у коливальному контурі

А	Б	В	Г
100 мкДж	100 мДж	10 мДж	немає правильної відповіді

Розв'язок: Енергія електричного поля конденсатора дорівнює $W = \frac{CU^2}{2}$. Усі величини для знаходження енергії електромагнітних коливань відомі з умови задачі. Сила струму через котушку індуктивності для розв'язання задачі не потрібна. Правильна відповідь А.

18. Якщо в результаті радіолокації електромагнітний імпульс повернувся через 0,3 мс, то об'єкт перебуває на відстані

А	Б	В	Г
більше 40 км	менше 30 км	від 30 до 40 км	немає правильної відповіді

Розв'язок: Шлях, пройдений електромагнітною хвилею, $S = ct = 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} =$ 90 000 м. Відстань до об'єкта вдвічі менша. Правильна відповідь А.

Вказівки та деякі рекомендації до виконання контрольних робіт з математики

При розв'язанні контрольних завдань учні повинні показати уміння лаконічно висловлювати свої думки, застосовувати точну математичну символіку. При оформленні роботи треба дотримуватися таких вимог: обґрунтованість розв'язання, повноцінна аргументація кожного кроку розв'язання, чіткість, охайність, раціональність. У зв'язку з підвищеними вимогами, які пред'являють вступникам у вищі навчальні заклади, зокрема тим, хто вибирає технічний напрям навчання, абітурієнт має володіти знанням сучасних методів та прийомів розв'язання прикладів і задач різноманітної складності з усього курсу елементарної математики. Заочна школа бере на себе відповідальність допомогти учням на шляху від школи до студентської лави, підтримати обдаровану молодь.

При перетворенні алгебраїчних виразів використовуються:

- **формули скороченого множення:**

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\ a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b);\ (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\mp ab+b^2\right).$$

За необхідності можна застосувати формули $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ або $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2,..\ a^{2n}+b^{2n}=\left(a^n+b^n\right)^2-2a^nb^n$ і далі розкласти на множники.

Інколи виникає потреба використати формулу $a^{2n}+b^{2n}=\left(a^n-b^n\right)^2+2a^nb^n$;

- **властивості степеня з натуральним та раціональним показником:**

$$a^0=1, a^1=a, a^{-1}=\frac{1}{a},\ a^p\cdot a^q=a^{p+q}, a^p/a^q=a^{p-q},\ (ab)^q=a^qb^q, \left(\frac{a}{b}\right)^q=\frac{a^q}{b^q},\ (a^q)^p=a^{qp},$$

$$p,q\in Q, a>0, b>0;$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b\neq 0,\ (\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k},\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a},\ \sqrt[n]{a^n}=a,\ \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,$$

$$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a},\ n,k\in N, n\geq 2, k\geq 2, a\geq 0, b\geq 0.$$

Необхідно зауважити, що коли степінь кореня парна, то

$$\sqrt[2k]{ab}=\begin{cases}\sqrt[2k]{a}\cdot\sqrt[2k]{b}, a\geq 0, b\geq 0\\ \sqrt[2k]{-a}\cdot\sqrt[2k]{-b}, a\leq 0, b\leq 0\end{cases}$$

аналогічно для $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}}$ ($b\neq 0$);

- **знищення ірраціональності в потрібному місті:**

$$\frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}=\frac{2\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{1-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{2\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{-1}\ \text{або}\ \frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}\ ;$$

• **виділення повного квадрата з під кореня:**
$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}=\left|3-2\sqrt{5}\right|=2\sqrt{5}-3.$

При знаходженні **області визначення** функції або алгебраїчного виразу (множини значень незалежного аргументу або всіх наборів числових значень букв виразу, при яких функція або вираз приймає дійсні та скінчені значення) застосовується, наприклад,

• **метод інтервалів розв'язування нерівностей:**
$\dfrac{(3-x)\cdot(1+x)^3\cdot(x-5)^4}{(x^2-4)x^2}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)\cdot(1+x)^3\cdot(x-5)^4}{(x-2)\cdot(x+2)x^2}\ge 0$, далі нанести на числову вісь значення x, при яких кожна дужка перетворюється на нуль (тобто 3, –1, 5, 2, –2, 0), підкреслити ті значення, що отримано з дужки, яка у парній степені (тобто 5, 0), і «виколоти» значення x, при яких знаменник перетворюється на нуль. Проводимо «змійку» з правої сторони, починаючи зверху (тут ліва частина виразу має знак «плюс»), через усі нанесені значення, дублюючи знак при переході через $x=5, x=0$. Будемо мати остаточно
$x\in(-\infty;-2)\cup[-1;0)\cup(0;2)\cup[3;+\infty)$;

• **квадратні нерівності:**
$x^2-x-6\le 0 \quad \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+3)\le 0 \quad x\in[-3;2]$ (використати метод інтервалів або намалювати параболу через $x=-3, x=2$ гілками вгору)

$2x^2-x+6\le 0$. Оскільки дискримінант від'ємний, то при всіх значеннях x ліва частина нерівності може бути тільки додатною (при додатному коефіцієнті при x^2), тому $x\in\varnothing$.

$2x^2-x+6\ge 0 \quad \Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty))$.

У задачах на тотожні перетворення тригонометричних виразів використовуються

• **основні тригонометричні формули:**
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\quad tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\alpha\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$, $\quad ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\ne\pi k,k\in Z$;
$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$; $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\alpha\ne\pi k,k\in Z$;

$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$, $\alpha\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z$; $1+ctg^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$, $\alpha\ne\pi k,k\in Z$; $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$, $\alpha\ne\dfrac{\pi k}{2},k\in Z$;

• **формули зведення,** які дають змогу перевести тригонометричну функцію тупого кута у тригонометричну функцію гострого кута:

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$, тобто назва функції змінюється (косинус на синус, тангенс на котангенс або навпаки), коли «відштовхуємось» від кутів $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$, і не змінюється — коли від $\pi k, k \in Z$, знак результату визначаємо відповідно до знаку заданої функції;

• **формули додавання:**

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ **;**

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

при потребі, користуючись наведеними формулами, неважко отримати формули для $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg(2\alpha)$, $ctg(\alpha \pm \beta)$, $ctg 2\alpha$;

• **формули пониження степеня або половинних кутів:**

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$;

• **формули перетворення алгебраїчної суми тригонометричних функцій у добуток:**

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$,

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$; $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$,

знаючи попередні формули, неважко отримати аналогічні формули і для $ctg\alpha \pm ctg\beta$;

• **формули перетворення добутку тригонометричних функцій в алгебраїчну суму:**

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$,

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$;

• **періодичність тригонометричних функцій:**

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$, $tg(\alpha + \pi k) = tg\alpha$,

$ctg(\alpha + \pi k) = ctg\alpha, k \in Z$.

При розв'язуванні найпростіших тригонометричних нерівностей, до яких зводяться інші тригонометричні нерівності, зручно користуватися геометричною інтерпретацією останніх (за допомогою графіків тригонометричних функцій або на колі одиничного радіуса).

При розв'язуванні **рівняння типу** $\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c$, де $a, b, c, m, n, p, q \in R, c \neq 0$, необхідно чисельник і знаменник кожного дробу поділити на $x \neq 0$ і після заміни $px + \frac{q}{x} = t$ вихідне рівняння зведеться до квадратного.

Ірраціональні нерівності, мають такий алгоритм розв'язку:

$$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le \left(g(x)\right)^{2n} \end{cases}, \quad \sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge \left(g(x)\right)^{2n} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.,$$

якщо радикал степеня $2n+1$ (непарного), то розв'язування нерівності при будь-якому знаку нерівності зводиться до піднесення правої і лівої відповідно частини до цього непарного степеня. Знак нерівності при цьому не змінюється.

При побудові **графіків елементарних функцій, які містять знак модуля,** треба пам'ятати, що **графік функції** $y = |f(x)|$ можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, симетрично відобразивши відносно осі OX ті частини графіка $y = f(x)$, які лежать нижче від осі OX, а всі частини, які лежать вище осі OX і на самій осі залишити без зміни;

графік функції $y = f(|x|)$ можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, залишивши його без зміни при $x \ge 0$, і побудувати його дзеркальне відображення на півплощину, де $x < 0$;

графік функції $y = |f(|x|)|$ можна одержати із графіка функції $y = f(|x|)$, залишивши без зміни всі його частини, які розташовуються вище і на осі OX, а частини, які лежать нижче від осі OX, симетрично відобразити відносно цієї осі;

графік функції $|y| = f(x)$ при $y \ge 0$ збігається з тими частинами графіка функції $y = f(x)$, які лежать вище і на осі OX $\left(f(x) \ge 0\right)$, а при $y < 0$ є їх симетричним відображенням відносно осі OX;

графік функції $|y| = |f(x)|$ при $y \ge 0$ збігається з графіком функції $y = |f(x)|$, а при $y < 0$ є його симетричним відображенням щодо осі OX; **графік функції** $|y| = |f(|x|)|$ при $y \ge 0$ збігається з графіком функції $y = |f(|x|)|$, а при $y < 0$ є його симетричним відображенням відносно осі OX.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з фізики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Фізика та астрономія»

Кравченко В. М.

10 клас

1. Тіло кинули з поверхні землі з початковою швидкістю v_0 = 20 м/с під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту. Визначити переміщення тіла за другу секунду руху. Опором повітря знехтувати. Вважати g = 10 м/с^2.

Розв'язок:

Позначимо t_1 = 1 с і t_2 = 2 с. Переміщення тіла за проміжок часу t_2 — t_1 можна знайти як $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$, де s_x і s_y — переміщення вздовж горизонтальної осі x та вертикальної осі y відповідно. Рух тіла вздовж осі x буде рівномірним зі сталою швидкістю $v_x = v_0\, cos\alpha$, а рух уздовж осі y буде рівносповільненим з прискоренням g і початковою швидкістю $v_y = v_0\, sin\alpha$. Тому $s_x = v_0\, cos\alpha\,(t_2 - t_1)$, а $s_y = v_0\, sin\alpha\,(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$. Звідси знаходимо шукане переміщення:

$$s = \sqrt{\left(v_0\, cos\alpha\,(t_2 - t_1)\right)^2 + \left(v_0\, sin\alpha\,(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)\right)^2} \approx 18 \text{ м.}$$

Відповідь: $s = \sqrt{\left(v_0\, cos\alpha\,(t_2 - t_1)\right)^2 + \left(v_0\, sin\alpha\,(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)\right)^2} \approx 18$ м.

2. Тягарець масою m = 200 г, підвішений на пружині з жорсткістю k = 20 Н/м, лежить на горизонтальній підставці так, що пружина не деформується. Підставку прибирають, і тягарець падає вниз. Визначити максимальне видовження пружини.

Розв'язок:

Максимальне видовження пружини x знайдемо із закону збереження механічної енергії. У початковий момент часу, коли пружина не деформована, повна енергія тягарця буде дорівнювати його потенціальній енергії $E_{n1} = mgx$ відносно його найнижчого положення, коли пружина буде максимально видовженою. Під час руху тягарця вниз його потенціальна енергія буде зменшуватися і перетворюватися у його кінетичну енергію та потенціальну енергію пружної деформації пружини. У найнижчому положенні тягарця, коли його рух униз на мить припиниться, вся енергія тягарця повністю перейде в потенціальну енергію пружної деформації пружини: $E_{n2} = \frac{kx^2}{2}$. Прирівнюючи ці два значення енергії, одержимо шукане максимальне видовження: $x = \frac{2mg}{k} \approx 20\ см$.

Відповідь: $x = \frac{2mg}{k} \approx 20\ см$.

3. Зразок виготовлено зі сплаву міді та срібла. Вага зразка у повітрі дорівнює P_1 = 10 Н, а у воді P_2 = 8,9 Н. Знайти маси міді та срібла у зразку. Густина міді $\rho_м = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, густина срібла $\rho_c = 10{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, густина води $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Розв'язок:

Нехтуючи силою Архімеда, що діє на зразок у повітрі, можемо записати: $P_1 = mg$, $P_2 = P_1 - \rho Vg$, де m і V — маса й об'єм зразка. Звідси одержуємо: $m = \frac{P_1}{g}$, $V = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$. З іншого боку, $m = m_м + m_c$, де $m_м$ і m_c — маси міді і срібла в зразку. Вважаючи, що після утворення сплаву об'єми міді та срібла не змінилися, можемо записати $V = V_м + V_c = \frac{m_м}{\rho_м} + \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{m_м}{\rho_м} + \frac{m - m_м}{\rho_c} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$.

Із цього рівняння знаходимо масу міді $m_м = \frac{(P_1 - P_2)\rho_м\rho_c - P_1\rho_м\rho}{(\rho_c - \rho_м)\rho g} = 715\ г$.

Маса срібла $m_c = m - m_м = \frac{P_1}{g} - m_м = 304\ г$.

Відповідь: Маса міді 715 г, маса срібла 304 г.

4. Що станеться зі шматком льоду маси m = 100 г з початковою температурою t = –5 ^{0}C при наданні йому кількості теплоти Q = 100 кДж? Питомі теплоємності льоду і води c_1 = 2,1 кДж/(кг·К) та c_2 = 4,2 кДж/(кг·К) відповідно. Питома теплота плавлення льоду λ = 330 кДж/кг, питома теплота пароутворення води r = 2,3 МДж/кг.

Розв'язок:

Для розв'язання задачі потрібно провести кількісні оцінки. При наданні шматку льоду певної кількості теплоти Q з ним можуть відбутися такі перетворення: він може нагрітися до температури плавлення $t_{пл}$ = 0 ^{0}C (для цього йому необхідна кількість теплоти Q_1), розтанути і повністю перетворитися на воду (необхідна кількість теплоти Q_2), вся вода може нагрітися до температури кипіння $t_{кип}$ = 100 ^{0}C (Q_3), вся вода може википіти і перетворитися на водяну пару (Q_4), і, нарешті, пара може нагрітися до певної температури, вищої за температуру кипіння води. Знайдемо ці кількості теплоти:

$Q_1 = c_1 m(t_{пл} - t) = 1{,}05\ кДж$;

$Q_2 = \lambda m = 33\ кДж$;

$Q_3 = c_2 m(t_{кип} - t_{пл}) = 42\ кДж$;

$Q_4 = r m = 230\ кДж$.

Звідси бачимо, що $Q_1 + Q_2 + Q_3 < Q < Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$, тобто увесь лід розтане, уся вода нагріється до температури кипіння і частина її випарується. Знайдемо ту частину $Q_{пар}$ наданої льоду кількості теплоти, яка піде на випаровування води: $Q_{пар} = Q - (Q_1 + Q_2 + Q_3) = 23{,}95\ кДж$. Звідси знаходимо масу пари $m_{пари} = \frac{Q_{пар}}{r} = 10{,}4\ г$. Маса води, що залишилась $m_{води} = m - m_{пари} = 89{,}6\ г$.

Відповідь: Лід перетвориться на воду масою 89,6 г при температурі 100 ^{0}С і водяну пару масою 10,4 г при тій самій температурі.

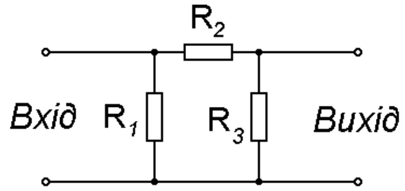
5. Реактивний літак має 4 двигуни, кожен з яких розвиває силу тяги F = 20 кН. Скільки палива потрібно для перельоту на відстань l = 5 тис. км, якщо питома теплота його згоряння q = 45 МДж/кг, а ККД двигунів η = 25%?

Розв’язок:

Сумарна сила тяги усіх двигунів літака: $F_л = nF$, де n = 4. Корисна механічна робота, яка виконується двигунами при перельоті літака на відстань l, дорівнює $A = nFl$. Для виконання такої роботи потрібно спалити кількість палива m таку, що $A = \eta Q = \eta mq$, де Q — це кількість теплоти, що виділиться при спалюванні необхідної кількості палива. Остаточно одержуємо: $m = \frac{nFl}{\eta q} = 35{,}5\ т$.

Відповідь: $m = \frac{nFl}{\eta q} = 35{,}5\ т$.

6. Якщо на вхід електричного кола (див. рис.) подати напругу U_1 = 100 В, то напруга на виході буде рівною U_3 = 40 В. При цьому через опір R_2 протікатиме струм I_2 = 1 А. Якщо ж на вихід кола подати напругу U_3' = 60 В, то напруга на вході становитиме U_1'= 15 В. Знайти величини опорів R_1, R_2 та R_3.



Розв'язок:

У першому випадку ми маємо два послідовно з'єднані опори R_2 і R_3, які разом підключені паралельно до опору R_1. Вхідну напругу U_1 подано на опір R_1, а вихідна напруга U_3 — це напруга на опорі R_3. Оскільки опори R_2 і R_3 з'єднані послідовно, то через них тече один і той самий струм: $I_2 = I_3 = \dfrac{U_3}{R_3}$.

Звідси легко знаходимо величину опору R_3: $R_3 = \dfrac{U_3}{I_2} = 40\ Ом$.

Напруга на опорі R_2 при цьому буде дорівнювати: $U_2 = I_2 R_2 = U_1 - U_3$. Звідси знаходимо величину опору R_2: $R_2 = \dfrac{U_1 - U_3}{I_2} = 60\ Ом$.

У другому випадку маємо два послідовно з'єднані опори R_1 і R_2, які разом підключені паралельно до опору R_3. Напругу U_3' подано на опір R_3, а напруга U_1' — це напруга на опорі R_1. Оскільки опори R_1 і R_2 з'єднані послідовно, то через них тече один і той самий струм: $I_1' = I_2' = \dfrac{U_2'}{R_2} = \dfrac{U_3' - U_1'}{R_2}$. Звідси можемо знайти величину опору R_1:

$$R_1 = \frac{U_1'}{I_1'} = R_2 \frac{U_1'}{U_3' - U_1'} = \frac{U_1 - U_3}{I_2} \cdot \frac{U_1'}{U_3' - U_1'} = 20\ Ом.$$

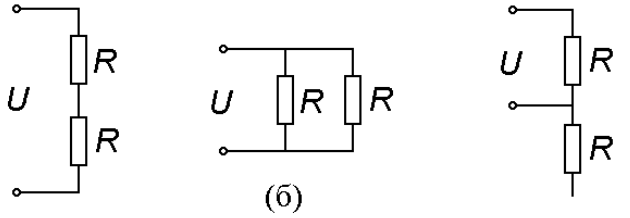
Відповідь: $R_1 = \dfrac{U_1 - U_3}{I_2} \cdot \dfrac{U_1'}{U_3' - U_1'} = 20\ Ом$, $R_2 = \dfrac{U_1 - U_3}{I_2} = 60\ Ом$,

$$R_3 = \frac{U_3}{I_2} = 40\ Ом.$$

7. Електроплитка з двома однаковими спіралями дає змогу отримати три значення теплової потужності залежно від способу підключення спіралей до мережі. Нарисуйте схеми підключення спіралей для всіх трьох випадків. У скільки разів різняться максимальна та мінімальна теплові потужності електроплитки?

Розв'язок:

Позначимо опір кожної зі спіралей через R, а напругу в мережі через U. Тоді теплова потужність електроплитки буде прямо пропорційна U^2 і обернено пропорційна сумарному опору в певний спосіб підключених спіралей.



(а) (б) (в)

Найменша потужність буде у випадку, коли сумарний опір спіралей максимальний. Це відбуватиметься тоді, коли вони будуть підключені до мережі послідовно (рис. (а)): $R_{плитки} = 2R$. Найбільша потужність буде у випадку, коли сумарний опір спіралей мінімальний. Це відбуватиметься тоді, коли вони будуть підключені до мережі паралельно (рис. (б)): $R_{плитки} = R/2$. І, нарешті, проміжним між попередніми значення потужності буде у випадку, коли до мережі буде підключена лише одна зі спіралей (рис. (в)): $R_{плитки} = R$.

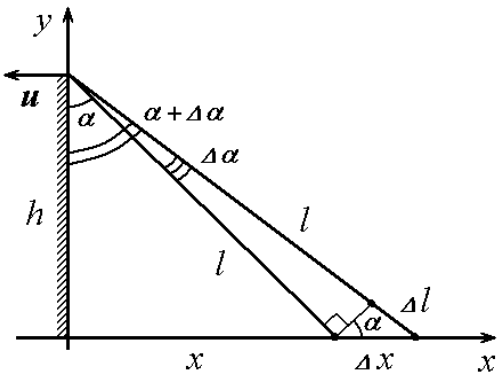
Отже, відношення максимальної потужності електроплитки до мінімальної дорівнюватиме: $\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{U^2}{R_{min}} \cdot \frac{R_{max}}{U^2} = \frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{2R}{R/2} = 4$.

Відповідь: Див. рис. (а)–(в) у тексті. $\frac{P_{max}}{P_{min}} = 4$.

11 клас

1. Рибалка, який стоїть на крутому березі озера, за мотузку підтягує до берега човен. Верхній кінець мотузки перебуває на висоті 5 м над рівнем озера. Визначити прискорення човна у момент, коли він опиниться на відстані 3 м від берега, якщо рибалка витягує мотузку зі сталою швидкістю 60 см/с.

Розв’язок:



Розглянемо переміщення човна за короткий проміжок часу Δt.

Швидкість, з якою рибалка витягує мотузку: $u = \frac{\Delta l}{\Delta t} = const$ (див. рис.).

Швидкість, з якою човен наближається до берега:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\sin\alpha \cdot \Delta t} = \frac{u}{\sin\alpha},$$

де α — це кут між вертикальною віссю y та мотузкою, за яку рибалка підтягує до берега човен (див. рис.).

Прискорення човна можна знайти як зміну його швидкості за короткий проміжок часу Δt: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Зміна швидкості човна:

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{u}{\sin\alpha} - \frac{u}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)} = u\cdot\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\Delta\alpha)} =$$
$$= u\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\Delta\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\Delta\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\Delta\alpha)} \approx u\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\Delta\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Якщо розглядати достатньо малий проміжок часу Δt ($\Delta t \to 0$), то тоді

$$\Delta\alpha \to 0,\ \cos\Delta\alpha \to 1,\ \sin\Delta\alpha \to \Delta\alpha,\ \sin(\alpha+\Delta\alpha) \to \sin\alpha.$$

Зміну кута α за час Δt можна записати у вигляді $\Delta\alpha = \frac{\Delta l\cdot ctg\alpha}{l}$ (див. рис.).

Звідси знаходимо зміну швидкості човна за час Δt : $\Delta v = u\cdot\frac{\Delta l}{l}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}$.

Нарешті, знаходимо шукане прискорення човна:

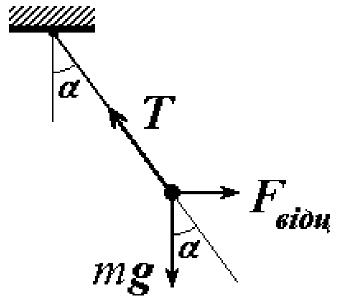
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{u^2}{l}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{u^2}{l}\cdot\left(\frac{h}{l}\right)^2\cdot\left(\frac{l}{x}\right)^3 = u^2\cdot\frac{h^2}{x^3} = 0{,}33\ м/с^2.$$

Відповідь: $a = u^2\cdot\frac{h^2}{x^3} = 0{,}33\ м/с^2$.

2. У вагоні потяга, що рухається рівномірно зі швидкістю v = 20 м/с по горизонтальному заокругленню радіусом R = 200 м, здійснюється зважування вантажу за допомогою динамометра, підвішеного до стелі вагона. Маса вантажу m = 5 кг. Визначити результат зважування.

Розв'язок:

Вага вантажу P, яку вимірюватиме динамометр, буде дорівнювати по модулю сили натягу пружини динамометра T, яка, у свою чергу, буде сумою сили тяжіння mg, направленої вертикально, та відцентрової сили $F_{відц}$, направленої горизонтально ($F_{відц} = m\frac{v^2}{R}$): $\boldsymbol{T} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{відц}$ (див. рис.).



Отже, за теоремою Піфагора, $P = T = mg\sqrt{1+\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2} = 51\,Н$.

Відповідь: $P = mg\sqrt{1+\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2} = 51\,Н$.

3. На клин маси M поклали тіло маси m ($m < M$) на висоті h над гладенькою горизонтальною поверхнею, на якій лежить клин. Клин утворює з горизонтальною поверхнею кут α. На яку відстань зміститься клин у момент, коли тіло повністю з нього зісковзне? Тертям клина об горизонтальну поверхню знехтувати.

Розв'язок:

Оскільки на клин і тіло на ньому в горизонтальному напрямку (у напрямку осі x) не діють жодні зовнішні сили, то буде виконуватися закон збереження імпульсу і сума проекцій імпульсів клина M та тіла m на напрямок осі x буде незмінною і рівною нулю (в системі відліку, пов'язаною з горизонтальною поверхнею). Позначимо швидкість клина відносно горизонтальної поверхні через u, горизонтальну складову швидкості тіла відносно горизонтальної поверхні через v_x, а горизонтальну складову швидкості тіла відносно поверхні клина через v_{1x}. Тоді можемо записати $v_x = u + v_{1x} = u + v_1 \cos\alpha$. За законом збереження імпульсу $M u + m(u + v_1 \cos\alpha) = 0$, звідки $u = -\dfrac{m \cos\alpha}{m+M} v_1$, тобто швидкість клина відносно горизонтальної поверхні прямо пропорційна швидкості тіла відносно поверхні клина. Коли тіло повністю зісковзне з клина, воно пройде шлях $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Клин при цьому зміститься на відстань $l = s\dfrac{m\cos\alpha}{M+m} = \dfrac{m}{M+m} h \cdot ctg\alpha$.

Відповідь: $l = \dfrac{m}{M+m} h \cdot ctg\alpha$.

4. Посередині відкачаної та запаяної з обох кінців горизонтальної трубки довжини L розміщений стовпчик ртуті висоти h. Якщо трубку поставити вертикально, то стовпчик ртуті зміститься на відстань l від свого початкового положення. Визначити тиск, до якого було відкачано трубку.

Розв'язок:

Позначимо через S площу поперечного перерізу трубки. Тоді початкові об'єми газу ліворуч і праворуч від стовпчика ртуті будуть дорівнювати $V = \dfrac{L-h}{2} S$, а шуканий тиск p дорівнюватиме $p = \dfrac{mRT}{\mu V} = \dfrac{2mRT}{\mu(L-h)S}$. Після того як трубку поставили вертикально, стовпчик ртуті дещо опуститься вниз і об'єм газу над стовпчиком ртуті збільшиться і стане рівним $V_1 = \left(\dfrac{L-h}{2} + l\right)S$, а під стовпчиком — зменшиться: $V_2 = \left(\dfrac{L-h}{2} - l\right)S$. Відповідно, тиск у верхній частині трубки стане рівним

$$p_1 = \frac{mRT}{\mu V_1} = \frac{pV}{V_1} = \frac{p(L-h)}{L-h+2l},$$

а у нижній — рівним $p_2 = \dfrac{mRT}{\mu V_2} = \dfrac{pV}{V_2} = \dfrac{p(L-h)}{L-h-2l}$. З іншого боку, тиск p_2 буде більшим за тиск p_1 на величину тиску стовпчика ртуті: $p_2 = p_1 + \rho g h$. Підставивши в останню формулу вирази для p_1 та p_2, остаточно одержимо: $p = \rho g h \dfrac{(L-h)^2 - 4l^2}{4l(L-h)}$.

Відповідь: $p = \rho g h \dfrac{(L-h)^2 - 4l^2}{4l(L-h)}$.

5. У каструлі теплоємністю 300 Дж/К один літр води закипає за 5 хв. Знайти, за який час після початку кипіння вода в каструлі повністю википить, якщо початкова температура води 20 °С. Питома теплоємність води c = 4,18 Дж/(г·К), її питома теплота пароутворення $q_{пар}$ = 2250 Дж/г. Випаровуванням води під час нагрівання до температури кипіння знехтувати.

Розв'язок:

Для нагрівання води в каструлі до кипіння їй потрібно надати кількість теплоти $Q = (C + c\rho V)(T_2 - T_1)$, де ρ і V — густина та об'єм води, T_1 — початкова температура, T_2 — температура кипіння води. Кількість теплоти, яка підводиться до каструлі з водою за одиницю часу (теплова потужність), дорівнює $P = \dfrac{Q}{\tau_1} = \dfrac{(C + c\rho V)(T_2 - T_1)}{\tau_1}$, де τ_1 — час закипання води.

Кількість теплоти, яку потрібно надати за час τ_2 воді, що почала кипіти, для її повного випаровування з каструлі, дорівнює $Q_{пар} = q_{пар} \rho V = P\tau_2$. Звідси можемо знайти час википання води:

$$\tau_2 = \frac{q_{пар} \rho V}{P} = \frac{q_{пар} \rho V \tau_1}{(C + c\rho V)(T_2 - T_1)} = 1883 \text{ с} = 31{,}4 \text{ хв.}$$

Відповідь: $\tau_2 = \dfrac{q_{пар} \rho V \tau_1}{(C + c\rho V)(T_2 - T_1)}$ = 1883 с = 31,4 хв.

6. Двом металевим кулям з радіусами r_1 та r_2, з'єднаним довгим тонким провідником, надали заряд Q. Потім кулю радіуса r_1 помістили всередину металевої заземленої сфери радіуса R ($R > r_1$). Який заряд пройде при цьому по з'єднувальному провіднику? Між сферою і кулею радіуса r_1 електричний контакт відсутній.

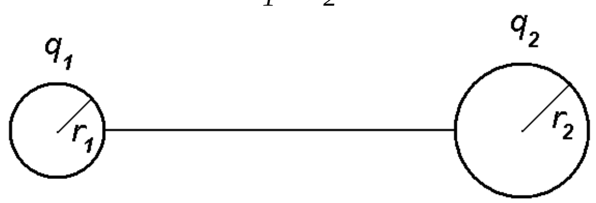
Розв'язок:

Знайдемо початкові заряди q_1 і q_2 заряджених куль (див. рис. (а)). Оскільки кулі з'єднані провідником, то їх потенціали будуть однаковими (умова ефектростатичної рівноваги): $\varphi_1 = \varphi_2$. Оскільки, за умовою задачі, довжина провідника значно більша за радіуси куль, то заряди на поверхнях різних куль не впливатимуть один на одного і будуть розподілятися по поверхнях кожної з куль рівномірно (сферично симетрично). Тому для потенціалу можна використати формули, справедливі для рівномірно зарядженої кулі, тобто

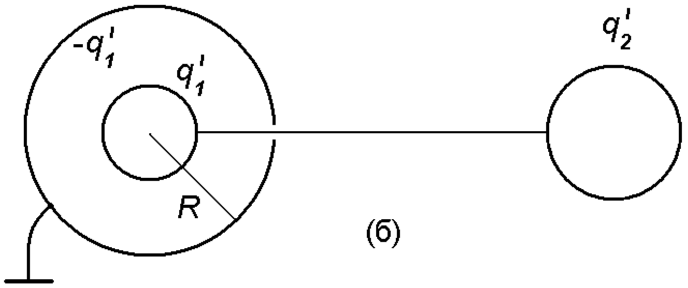
$$\frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2} = \frac{k(Q - q_1)}{r_2}, \text{ де } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Звідси легко можна знайти заряд кожної з куль. Зокрема, для заряду першої кулі одержимо

$$q_1 = Q\frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$



(а)



(б)

Після того як кулю радіуса r_1 помістили всередину металевої заземленої сфери (рис. (б)), заряд кожної з куль зміниться, але потенціали цих куль залишаться рівними: $\varphi_1' = \varphi_2'$. Позначимо новий заряд першої кулі через q_1'. Тоді заряд другої кулі буде $q_2' = Q - q_1'$.

Розглянемо тепер заряди, що виникатимуть на провідній сфері. Якщо сферу не заземляти, то її сумарний заряд залишатиметься рівним нулеві (вважаємо, що сфера була незарядженою). При цьому на внутрішній поверхні сфери з'явиться індукований заряд $-q_1'$, зумовлений електричним полем зарядженої кулі радіуса r_1, а на зовнішній поверхні сфери — індукований заряд $+q_1'$ (оскільки заряди протилежних знаків притягуються, а одного знаку — відштовхуються). При цьому потенціал цієї незаземленої сфери буде відмінним від нуля. Якщо тепер заземлити сферу, то заряди із зовнішньої поверхні сфери підуть у землю, а її потенціал стане рівним нулеві (рівним потенціалу землі). Заряди на внутрішній поверхні сфери залишаться, оскільки вони притягуються до зарядів зарядженої кулі радіуса r_1. Отже, сумарний заряд заземленої сфери $q'_{сф}$ вже не буде рівним нулеві, а дорівнюватиме $q'_{сф} = -q'_1$.

Потенціал усередині порожньої зарядженої провідної сфери (тобто, якщо всередині сфери немає інших заряджених тіл) дорівнює потенціалу на її поверхні, отже $\varphi'_{сф} = \frac{kq'_{сф}}{R} = -\frac{kq'_1}{R}$.

За принципом суперпозиції, потенціал електричного поля, що створюється кількома зарядженими тілами, дорівнює сумі потенціалів полів, що створюються кожним із цих тіл окремо. Тому потенціал на поверхні заземленої, але водночас зарядженої і не порожньої сфери, буде дорівнювати нулеві. І тому потенціал на поверхні кулі радіуса r_1, оточеної зарядженою сферичною оболонкою радіуса R, буде дорівнювати сумі потенціалів полів, що створюються зарядами і самої кулі, і зовнішньої сферичної оболонки, тобто

$$\varphi'_1 = \frac{kq'_1}{r_1} + \varphi'_{сф} = \frac{kq'_1}{r_1} - \frac{kq'_1}{R}.$$

Потенціал зарядженої кулі радіуса r_2 можемо записати у вигляді:

$$\varphi'_2 = \frac{kq'_2}{r_2} = \frac{k(Q - q'_1)}{r_2}.$$

Прирівнюючи ці два вирази, знаходимо q'_1: $q'_1 = Q\frac{r_1 R}{r_2(R - r_1) + r_1 R}$.

Шукана величина заряду, що пройде по з'єднувальному провіднику після оточення першої кулі заземленою провідною сферою, дорівнюватиме:

$$\Delta q = q_1 - q'_1 = Q\frac{r_1^2 r_2}{(r_2(R - r_1) + r_1 R)\cdot(r_1 + r_2)}.$$

Відповідь: $\Delta q = Q\frac{r_1^2 r_2}{(r_2(R - r_1) + r_1 R)\cdot(r_1 + r_2)}$.

7. Напівпорожню пляшку циліндричної форми кинули вертикально вниз у прісну воду. Визначити період коливань пляшки, якщо її маса дорівнює 600 г, а її зовнішній діаметр — 7 см.

Розв'язок:

У стані рівноваги сила тяжіння, що діє на пляшку, врівноважується силою Архімеда, що діє на пляшку у воді. При відхиленні пляшки по вертикалі від положення рівноваги виникатиме повертальна сила, яка буде дорівнювати векторній сумі цих двох сил. Сила тяжіння, що діє на пляшку, буде при цьому сталою, а сила Архімеда буде змінюватися залежно від глибини занурення пляшки. Модуль повертальної сили буде прямо пропорційний величині відхилення від положення рівноваги (рівноважної глибини занурення). Позначимо величину вертикального відхилення від положення рівноваги через y. Тоді другий закон Ньютона для пляшки у воді можемо записати у вигляді

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_A,$$

або, в проекціях на вертикальну вісь y, у вигляді

$$ma = -\rho g S y,$$

де S — це площа поперечного перерізу пляшки.

Це рівняння можна переписати у вигляді рівняння, що описує вертикальні гармонічні коливання пляшки у воді, а саме

$$a + \omega_0^2 y = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{\rho g S}{m}.$$

Враховуючи те, що $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ і $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, одержуємо остаточний вираз для шуканого періоду коливань: $T = \dfrac{4\pi}{d}\sqrt{\dfrac{m}{\pi\rho g}} = 0{,}79\ c$.

Відповідь: $T = \dfrac{4\pi}{d}\sqrt{\dfrac{m}{\pi\rho g}} = 0{,}79\ c$.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з фізики настановної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Фізика та астрономія»

Кравченко В. М.

10 клас

1. З яким прискоренням будуть ковзати по похилій площині два жорстко скріплених між собою тіла з масами m_1 і m_2, якщо коефіцієнти тертя цих тіл об площину дорівнюють відповідно μ_1 та μ_2, а похила площина утворює з горизонтом кут α?

Розв'язок:

Запишемо другий закон Ньютона, спроектувавши всі сили на вісь x, паралельну похилій площині і направлену вниз:

$$(m_1+m_2)a=(m_1+m_2)g\sin\alpha-(\mu_1 N_1+\mu_2 N_2)=$$
$$=(m_1+m_2)g\sin\alpha-(\mu_1 m_1 g\cos\alpha+\mu_2 m_2 g\cos\alpha).$$

З цього рівняння легко знаходимо шукане прискорення:

$$a=g\left(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right).$$

Відповідь: $a=g\left(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\dfrac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right).$

2. Легка тенісна кулька падає з нульовою початковою швидкістю вниз з висоти h. В нижній точці її траєкторії по ній б'ють ракеткою знизу вгору, в результаті чого кулька підскакує на висоту, в n разів більшу за початкову. Знайти швидкість ракетки в момент удару. Удар вважати абсолютно пружним, а масу ракетки значно більшою за масу кульки. Опором повітря знехтувати.

Розв'язок:

Швидкість тенісної кульки відносно землі в найнижчий точці її траєкторії (безпосередньо перед ударом ракеткою) дорівнює: $v=\sqrt{2gh}$. Якщо позначити швидкість ракетки відносно землі через u, то модуль швидкості кульки відносно ракетки до удару буде дорівнювати $v+u$. При абсолютно пружному ударі кульки об ракетку, маса якої набагато більша за масу кульки, швидкість кульки *відносно ракетки* після удару залишається незмінною за модулем, але протилежною за напрямком. Оскільки ракетка рухається відносно землі вгору зі швидкістю u, то швидкість кульки після удару *відносно землі* дорівнюватиме: $v' = (v+u)+u = v+2u$. З іншого боку, після удару кулька підскакує на висоту, в n разів більшу за початкову, і тому ми можемо записати: $v' = \sqrt{2ghn} = v\sqrt{n}$. Звідси знаходимо шукану швидкість ракетки: $u = \sqrt{\dfrac{gh}{2}} \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right)$.

Відповідь: $u = \sqrt{\dfrac{gh}{2}} \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right)$.

3. Дві однакові кульки з'єднані невагомим стержнем довжини l_0 і лежать на горизонтальній площині. Системі надано обертального руху так, що її центр залишається нерухомим. Скільки обертів встигне зробити система до моменту зупинки, якщо початкова швидкість кожної з кульок дорівнює v_0, а коефіцієнт тертя об площину дорівнює μ?

Розв'язок:

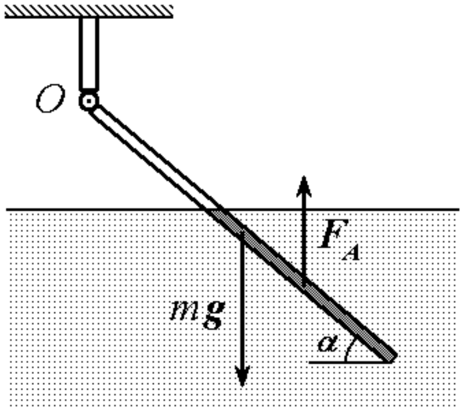
Кожна з кульок буде рухатися по колу радіуса $r = \dfrac{l_0}{2}$. За один повний оберт кожна з кульок буде проходити шлях $s = 2\pi r = \pi l_0$. Повний шлях, який пройде кожна кулька до зупинки $S = ns$, де n — шукана кількість обертів системи. Повний шлях S можемо знайти із закону збереження енергії: $\dfrac{mv_0^2}{2} = \mu m g S$. Остаточно одержуємо: $n = \dfrac{v_0^2}{2\pi \mu g l_0}$.

Відповідь: $n = \dfrac{v_0^2}{2\pi \mu g l_0}$.

4. Тоненька паличка густини ρ закріплена шарнірно за верхній кінець і опущена нижнім кінцем у рідину густини $\rho_0 > \rho$. Яка частина палички буде знаходитися в рідині при рівновазі?

Розв'язок:

Умовою рівноваги палички в рідині буде рівність відносно осі обертання (т. O на рисунку) моментів сили тяжіння $m\boldsymbol{g}$, що діє на всю паличку, прикладена до її центра мас і направлена вниз, та сили Архімеда $\boldsymbol{F_A}$, що діє на занурену в рідину частину палички, прикладена до центра мас *зануреної частини* палички і направлена вгору (див. рис.).



Позначимо повну довжину палички через l, а довжину зануреної частини палички — через x. Тоді плече сили тяжіння відносно т. O дорівнюватиме $\frac{l}{2}\cos\alpha$, а плече сили Архімеда дорівнюватиме $\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha$, де α — кут, який паличка утворює з горизонтом. Позначимо площу поперечного перерізу палички через S. Тоді рівняння моментів буде мати вигляд: $\rho S l g \frac{l}{2}\cos\alpha = \rho_0 S x g\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha$. Розв'язуючи це рівняння відносно x, знаходимо шукане відношення η довжини зануреної частини палички до її повної довжини: $\eta = \frac{x}{l} = 1-\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_0}}$.

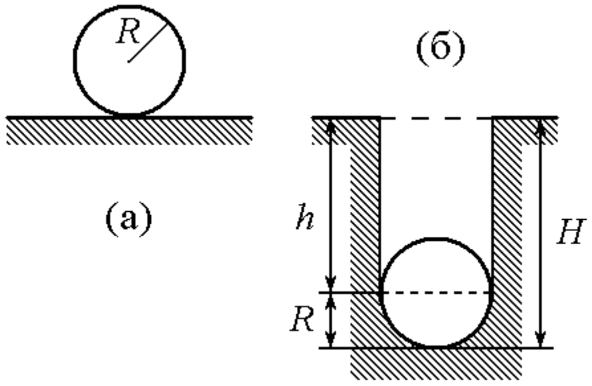
Відповідь: $\eta = 1-\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_0}}$.

5. Сталеву кульку радіуса R, нагріту до температури t, поклали на лід, температура якого 0^0 С. На яку глибину кулька зануриться в лід? Теплопровідністю льоду і роботою сили тяжіння знехтувати. Вважати, що кулька занурюється в лід повністю.

Розв'язок:

Нагріта кулька буде плавити під собою лід (рис. (а)), який перетворюватиметься на воду, і повільно занурюватися вглиб льоду. Оскільки вода, що утворюватиметься, матиме постійний тепловий контакт з льодом при температурі 0 ^{0}С, то і її температура також буде рівною 0 ^{0}С.

Для того, щоб знайти глибину занурення кульки в лід H (рис. (б)), знайдемо спочатку об'єм води, що утвориться внаслідок танення льоду.



Рівняння теплового балансу матиме вигляд:

$$\lambda \rho_в V_в + c_{ст} \rho_{ст} V_{ст} (0 - t) = 0,$$

де λ — питома теплота плавлення льоду, $c_{ст}$, $\rho_{ст}$ та $V_{ст}$ — питома теплоємність, густина та об'єм сталевої кульки відповідно, а $\rho_в$, $V_в$ — відповідно густина та об'єм води, що утворилася при таненні льоду. Об'єм води $V_в$ буде дорівнювати сумі об'ємів суцільного циліндра висоти h та півкулі радіуса R (див. рис. (б)). Відповідно, глибина занурення кульки дорівнюватиме: $H = h + R$. Розв'язуючи одержане рівняння відносно $V_в$ і враховуючи, що $V_{ст} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, а $V_в = \pi R^2 h + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3}$, знаходимо шукану глибину занурення кульки у лід: $H = h + R = R \cdot \dfrac{\lambda \rho_в + 4 c_{ст} \rho_{ст} t}{3\lambda \rho_в}$.

Відповідь: $H = R \cdot \dfrac{\lambda \rho_в + 4 c_{ст} \rho_{ст} t}{3\lambda \rho_в}$.

6. Знайти вартість кип'ятіння 1,5 л води з початковою температурою 20^0 С в електричному чайнику з ККД 70 %, якщо вартість 1 кВт·год електроенергії становить 28 коп. Питома теплоємність води 4,2 кДж/(кг·К).

Розв'язок:

Кількість теплоти, необхідна для нагрівання об'єму води V від початкової температури t до температури кипіння $t_{кип}$, дорівнює: $Q_{кор} = c\rho V (t_{кип} - t)$. Кількість спожитої електроенергії, необхідної для кип'ятіння води в електрочайнику з ККД η, дорівнює: $Q_{спож} = \dfrac{Q_{кор}}{\eta} = \dfrac{c\rho V (t_{кип} - t)}{\eta}$. Виражаючи спожиту енергію в кВт·год (1 кВт·год = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж) і враховуючи вартість 1 кВт·год електроенергії, знаходимо шукану вартість кип'ятіння 1,5 л води, яка становитиме 5,6 коп.

Відповідь: 5,6 коп.

7. Дві лампи з номінальною потужністю — одна з P_1 = 40 Вт, а інша з P_2 = 60 Вт, розраховані на однакову напругу, підключені послідовно до мережі з такою ж напругою. Які потужності будуть споживати ці лампи? Котра з них буде світити яскравіше?

Розв'язок:

Споживана потужність електричної лампи P визначається опором її спіралі R як $P = \frac{U^2}{R}$, де U — напруга в мережі. Відповідно, опори спіралей цих двох ламп будуть дорівнювати $R_1 = \frac{U^2}{P_1}$ та $R_2 = \frac{U^2}{P_2}$. Очевидно, що при $P_1 < P_2$ буде $R_1 > R_2$.

При послідовному підключенні цих двох ламп до мережі через їх спіралі буде протікати один і той же струм $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{U(P_1 + P_2)}$. Потужності, які будуть споживати ці лампи при такому підключенні, дорівнюватимуть відповідно $P_1' = I^2 \cdot R_1 = \frac{P_1 \cdot P_2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot P_2 = 14{,}4\ Вт$ та $P_2' = I^2 \cdot R_2 = \frac{P_1 \cdot P_2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot P_1 = 9{,}6\ Вт$.

Очевидно, що $P_1' > P_2'$. Отже, яскравіше буде світити перша лампа, з меншою номінальною потужністю.

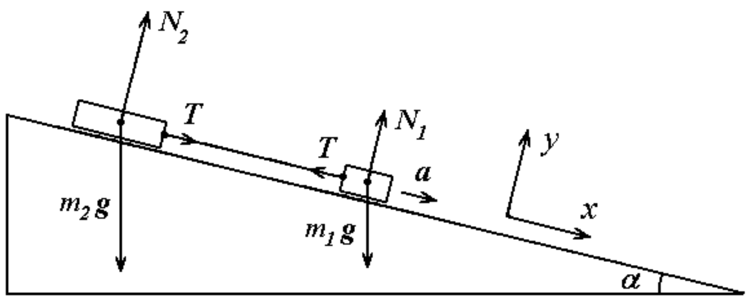
Відповідь: $P_1' = \frac{P_1 \cdot P_2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot P_2 = 14{,}4\ Вт$ та $P_2' = \frac{P_1 \cdot P_2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot P_1 = 9{,}6\ Вт$. Яскравіше буде світити перша лампа, з меншою номінальною потужністю.

11 клас

1. Два тіла з масами m_1 = 400 г і m_2 = 800 г, зв'язані між собою нерозтяжною ниткою, ковзають по похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^0$. Коефіцієнти тертя цих тіл об площину дорівнюють відповідно μ_1 = 0,1 та μ_2 = 0,2. Чому дорівнює сила натягу нитки, якщо тіло маси m_1 рухається попереду?

Розв'язок:

Запишемо другий закон Ньютона для кожного з тіл, спроектувавши сили, що на них діють на осі x та y відповідно (див. рис.).



Одержимо:

Ox: $m_1 a = m_1 g \sin\alpha - \mu_1 N_1 - T, \quad m_2 a = m_2 g \sin\alpha - \mu_2 N_2 + T$

Oy: $0 = N_1 - m_1 g \cos\alpha, \quad 0 = N_2 - m_2 g \cos\alpha$.

Розв'язуючи одержану систему рівнянь, знаходимо шукану силу натягу нитки: $T = -g \cdot \dfrac{m_1 m_2 (\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = -0,23\ H$.

Знак «–» вказує на те, що сила натягу нитки, що діє на тіло m_1, направлена протилежно осі x.

Відповідь: $T = g \cdot \dfrac{m_1 m_2 (\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0,23\ H$.

2. Візок маси M разом з людиною маси m рухається горизонтально зі швидкістю $\boldsymbol{u}$. Людина починає йти зі сталою швидкістю по візку в тому ж напрямку. При якій швидкості людини відносно візка він зупиниться? Тертям коліс візка об землю знехтувати.

Розв'язок:

Оскільки вздовж горизонтального напрямку руху ніякі зовнішні сили ні на візок, ні на людину не діють (сила тяжіння та сила реакції опори напрямлені вертикально), то проекція сумарного імпульсу такої системи на напрямок руху має зберігатися. В системі відліку, пов'язаній з землею, закон збереження горизонтальної проекції сумарного імпульсу можемо записати як $(M + m)\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{v} + M \cdot 0$. Звідси легко знаходимо шукану швидкість людини відносно візка (і відносно землі!): $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\left(\dfrac{M}{m} + 1\right)$.

Відповідь: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\left(\dfrac{M}{m} + 1\right)$.

3. Людина в окулярах заходить з вулиці, де температура повітря t_1 = 5 °С, до теплої кімнати, де температура повітря t_2 = 25 °С. При якій максимальній вологості повітря в кімнаті окуляри не будуть запотівати? Тиск насиченої водяної пари при 5 °С становить p_1 = 866 Па, а при 25 °С p_2 = 3192 Па.

Розв'язок:

Коли людина заходить у приміщення, то поблизу стекол окулярів кімнатне повітря охолоджується до температури t_1. Якщо вміст водяної пари в кімнатному повітрі (абсолютна вологість кімнатного повітря ρ_2, яка не залежить від температури) є таким, що при охолодженні до температури t_1 пара стане насиченою, то тоді окуляри запотіють. Абсолютна вологість кімнатного повітря при температурі t_2 дорівнює $\rho_2 = r\,\dfrac{\mu\, p_2}{R T_2}$, де r — відносна вологість кімнатного повітря. Абсолютна вологість повітря, при якій водяна пара стає насиченою при температурі t_1, дорівнює $\rho_1 = \dfrac{\mu p_1}{RT_1}$. Умовою запотівання окулярів є умова $\rho_2 \geq \rho_1$. Шукану максимальну відносну вологість теплого кімнатного повітря можемо знайти з умови $\rho_2 = \rho_1$. Таким чином, остаточно одержуємо: $r_{max} = \dfrac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = 0{,}3 = 30\%$.

Відповідь: $r_{max} = \dfrac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = 30\%$.

4. Лазерні трубки об'ємом 60 см^3 повинні заповнюватися сумішшю гелію і неону в молярному співвідношенні 5:1, а загальний тиск суміші має дорівнювати 6 мм рт. ст. Є два балони з цими газами, об'єм кожного становить 2 л. Тиск в балоні з гелієм дорівнює 50 мм рт. ст., а в балоні з неоном — 200 мм рт. ст. Скільки трубок можна наповнити, використовуючи ці балони з газами?

Розв'язок:

Позначимо загальний тиск суміші гелію і неону в лазерній трубці через p_0, об'єм трубки через V_0, кількості молей гелію і неону в трубці ν_1 і ν_2 відповідно. Тоді відношення кількості молей гелію і неону в трубці: $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = n = 5$, а парціальні тиски гелію та неону в трубці $p_{01} = p_0 \dfrac{n}{n+1}$ та $p_{02} = p_0 \dfrac{1}{n+1}$ відповідно. Для кількості молів кожного з газів в лазерній трубці можемо записати: $\nu_1 = \dfrac{p_0 V_0}{RT} \cdot \dfrac{n}{n+1}$, $\nu_2 = \dfrac{p_0 V_0}{RT} \cdot \dfrac{1}{n+1}$.

Позначимо через p_1, p_2 та V початкові тиски та об'єм балонів з гелієм і неоном відповідно, а через p_1' та p_2' — тиски в балонах після використання частини газу для накачування лазерних трубок. Накачувати лазерні трубки газами з балонів ми можемо за одночасного виконання наступних умов: $p_1' \geq p_0$ та $p_2' \geq p_0$. Знайдемо максимальну кількість «порцій для накачки» N_1 та N_2 кожного з газів, що містяться у відповідних балонах. Для цього перепишемо попередні дві умови у вигляді:

$$p_1' = p_1 - N_1 \cdot \nu_1 \cdot \frac{RT}{V} = p_1 - N_1 \cdot \frac{p_0 V_0}{V} \cdot \frac{n}{n+1} \geq p_0$$

та $p_2' = p_2 - N_2 \cdot \nu_2 \cdot \dfrac{RT}{V} = p_2 - N_2 \cdot \dfrac{p_0 V_0}{V} \cdot \dfrac{1}{n+1} \geq p_0$, звідки для максимальної кількості порцій одержимо $N_1 = 293$ та $N_2 = 6466$.

Таким чином, кількість лазерних трубок N, які ми можемо накачати газами з балонів, обмежена кількістю гелію. Ми можемо одержати $N > N_1$, якщо оптимізуємо процес накачування. Для цього у порожню (відкачану до високого вакууму) лазерну трубку будемо спочатку накачувати гелій, якого нам вистачить на меншу кількість порцій, ніж неону. При цьому ми створюватимемо в лазерній трубці тиск гелію, рівний його парціальному тиску p_{01} в повністю заповненій трубці. Умовою накачування гелію в трубку буде тепер умова $p_1' \geq p_{01}$, яку виконати простіше і яка забезпечить можливість накачування більшої кількості трубок N, ніж N_1. Справді

$$p_1' = p_1 - N \cdot \frac{p_0 V_0}{V} \cdot \frac{n}{n+1} \geq p_{01},$$

звідки остаточно одержимо $N \leq \frac{(p_1 - p_{01})V}{p_0 V_0} \cdot \frac{n+1}{n} = 300$. Тобто, максимальна кількість лазерних трубок, яку ми зможемо накачати, буде N = 300.

Відповідь: 300 трубок.

5. Два однакових тіла, зв'язані ниткою довжини l, лежать на горизонтальній площині. Заряд кожного тіла дорівнює q, маса дорівнює m. Нитку перепалюють і тіла починають ковзати по площині. Знайти максимальну швидкість кожного з тіл, якщо коефіцієнт тертя об площину дорівнює μ?

Розв'язок:

Запишемо закон збереження повної енергії для цих двох тіл: $E_{n0} = E_n + 2E_k + 2A_{тер}$, де E_{n0} — початкова потенціальна енергія електростатичного відштовхування двох тіл, E_n — потенціальна енергія відштовхування двох тіл під час їх руху, E_k — кінетична енергія кожного з тіл, $A_{тер}$ — робота сили тертя над кожним з тіл. Перепишемо це рівняння у вигляді $\frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{x} + 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + 2 \cdot \mu m g \cdot \frac{x-l}{2}$, де $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, x — відстань між тілами під час руху, $\frac{x-l}{2}$ — переміщення кожного з тіл.

Спочатку тіла будуть рухатися з додатнім прискоренням, оскільки сила електростатичного відштовхування буде перевищувати силу тертя. Потім, через деякий час, рух тіл почне гальмуватися, оскільки сила електростатичного відштовхування стане меншою за силу тертя. Відповідно швидкість кожного з тіл буде найбільшою в момент, коли сила електростатичного відштовхування буде рівною силі тертя: $\frac{kq^2}{x^2} = \mu m g$. Звідси знаходимо відстань між тілами в момент, коли їх швидкості будуть максимальними: $x = \sqrt{\frac{kq^2}{\mu m g}}$.

Підставляючи ці відстань у попереднє рівняння, одержуємо шукану максимальну швидкість кожного з тіл відносно площини:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g l + \frac{k q^2}{m l} - 2q\sqrt{\frac{k \mu g}{m}}} \,.$$

Відповідь: $v_{\max} = \sqrt{\mu g l + \frac{k q^2}{m l} - 2q\sqrt{\frac{k \mu g}{m}}}$.

6. Електричне коло складається з акумулятора з внутрішнім опором r і навантаження з опором R. Вольтметр, підключений спочатку послідовно, а потім паралельно до опора R, показує одну й ту ж напругу. Чому дорівнює опір вольтметра?

Розв'язок:

Позначимо опір вольтметра через $R_в$. При послідовному підключенні вольтметра до опора R він показуватиме напругу $U_1 = R_в \cdot I_1 = R_в \cdot \frac{E}{r + R + R_в}$, де I_1 — струм у колі. При паралельному підключенні вольтметра до опора R він показуватиме напругу $U_2 = E - r \cdot I_2 = E - r \cdot \frac{E}{r + \frac{R R_в}{R + R_в}}$, де I_2 — повний струм у колі. Прирівнюючи ці два значення напруги і розв'язуючи одержане рівняння, остаточно знаходимо опір вольтметра: $R_в = \frac{R^2}{r}$.

Відповідь: $R_в = \frac{R^2}{r}$.

7. Найвище поселення, у якому живуть люди, знаходиться на висоті h = 6200 м над рівнем моря (Ронбурзький монастир в Гімалаях). На скільки секунд за добу буде поспішати (чи відставати?) маятниковий годинник, вивірений на цій висоті, якщо його опустити на рівень моря?

Розв'язок:

Період коливань маятника годинника на рівні моря $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, а на висоті h над рівнем моря $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$, причому $g = \frac{GM}{R^2}$, а $g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2}$. Тут M і R — маса і радіус Землі. Число секунд, які відміряє годинник за проміжок часу t, поданий в секундах (t = 1 доба = 86400 с), на рівні моря дорівнюватиме $n_0 = \frac{t}{T_0}$, а на висоті h над рівнем моря $n_1 = \frac{t}{T_1}$. Відповідно різниця показів годинника на рівні моря і на висоті h становитиме

$$\Delta n = n_0 - n_1 = \frac{t}{T_0} - \frac{t}{T_1} = \frac{t}{T_1} \cdot \frac{h}{R} = 84\ c\,.$$

Оскільки $\Delta n > 0$, то годинник на рівні моря буде *поспішати*.

Відповідь: $\Delta n = \frac{t}{T_1} \cdot \frac{h}{R} = 84\ c$. Годинник на рівні моря буде поспішати.

Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії Всеукраїнської фізико-технічної очно-заочної школи на 2012–2013 н. р.

Секція «Фізика та астрономія»

Кравченко В. М.

10 клас

1. Пасажир першого вагону поїзда довжини l прогулювався по перону. Коли він був біля останнього вагону, поїзд почав рухатися з прискоренням a. Пасажир відразу побіг до свого вагону зі швидкістю v. Через скільки часу він дожене свій вагон? Якою має бути мінімальна швидкість пасажира, щоб він зміг наздогнати свій вагон?

Розв'язання:

Позначимо час, за який пасажир дожене свій вагон, через t. За цей час перший вагон, рухаючись рівноприскорено з прискоренням a, проїде відносно перону відстань $l_1 = \frac{a t^2}{2}$, а пасажир, рухаючись рівномірно зі сталою швидкістю v, пробіжить відстань $l_2 = vt$. Пасажир наздожене свій вагон за умови $l_2 = l_1 + l$ або $vt = \frac{a t^2}{2} + l$. Розв'язуючи це квадратне рівняння, знаходимо шуканий час t: $t = \frac{v}{a}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}}\right)$. Тут враховано те, що пасажир наздоганяє свій вагон (знак «+» перед дискримінантом), а не біжить йому назустріч.

Пасажир зможе наздогнати свій вагон за умови, що він буде бігти досить швидко. Це означає, що дискримінант квадратного рівняння, який буде тим більшим, чим більшою буде швидкість пасажира, має бути дійсним, тобто $1 - \frac{2al}{v^2} \ge 0$. Звідси знаходимо найменшу швидкість пасажира, при якій він зможе наздогнати свій вагон: $v_{min} = \sqrt{2al}$.

Відповідь: $t = \frac{v}{a}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}}\right)$, $v_{min} = \sqrt{2al}$.

2. Зі шлангу, нахиленого під кутом α до горизонту, б'є вода зі швидкістю v. Знайти масу води, що перебуває в поточний момент у повітрі, якщо

площа поперечного перерізу отвору шлангу дорівнює S, висота отвору над землею h, густина води ρ.

Розв'язання:

Маса води, що перебуває у повітрі, дорівнює масі води, що встигла витікти з отвору шлангу за час t, рівний часу руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v з певної висоти h, до моменту його падіння на землю. Цей час дорівнює сумі часу t_1 підйому тіла на найбільшу висоту та часу падіння з цієї висоти на землю t_2. Час підйому: $t_1 = \dfrac{v\sin\alpha}{g}$.

Максимальна висота підйому: $H = h + \dfrac{(v\sin\alpha)^2}{2g}$. Час падіння з найбільшої висоти: $t_2 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} = \sqrt{\dfrac{2}{g}\left(h + \dfrac{(v\sin\alpha)^2}{2g}\right)}$. Отже, повний час руху:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v\sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + \frac{(v\sin\alpha)^2}{2g}\right)}.$$

Звідси легко знаходимо шукану масу води:

$$m = \rho V = \rho S v t = \frac{\rho S v^2 \sin\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v\sin\alpha)^2}}\right).$$

Відповідь: $m = \dfrac{\rho S v^2 \sin\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2gh}{(v\sin\alpha)^2}}\right)$.

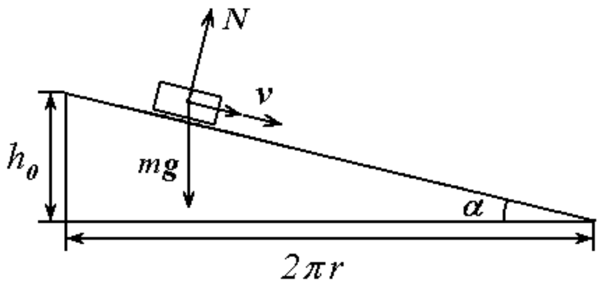
3. По циліндричній гладенькій і жорсткій спіралі, вісь якої вертикальна, зісковзує маленька кулька маси m. Радіус витка спіралі дорівнює r, крок спіралі (відстань по вертикалі між двома сусідніми витками) дорівнює h_0. З якою силою діє кулька на спіраль у момент, коли вона опустилася на відстань h (по вертикалі)? Кулька почала рухатися з нульовою початковою швидкістю.

Розв'язання:

Рух кульки по вертикальній спіралі можна розкласти на два види руху: рівноприскорений рух вертикально вниз із прискоренням $a = g\sin\alpha$ (див. нижче) та рівноприскорений рух по горизонтальному колу радіуса r.

Модуль швидкості кульки у момент, коли вона опустилася на відстань h по вертикалі, можемо знайти із закону збереження енергії: $\dfrac{mv^2}{2} = mgh$, звідки

$v = \sqrt{2gh}$. Модуль швидкості кульки буде таким самим, як і у тіла, що рухається без тертя по похилій площині з кутом α таким, що $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h_0}{2\pi r}$ (див. рис.).



Модуль горизонтальної складової швидкості кульки:

$$v_\perp = v\cos\alpha = \sqrt{2gh}\cdot\cos\alpha.$$

Сила F, з якою кулька буде діяти на спіраль, дорівнюватиме векторній сумі сили нормальної реакції опори N (див. рис.), вектор якої перпендикулярний до витка спіралі і *лежить на боковій поверхні циліндра*, утвореного витками спіралі, та відцентрової сили $F_{відц}$, з якою на спіраль діє кулька, що рухається по горизонтальному колу радіуса r, і вектор якої *перпендикулярний до бокової поверхні циліндра*, утвореного витками спіралі, тобто вектори N і $F_{відц}$ є взаємно перпендикулярними.

Отже, $N = mg\cos\alpha = mg\cdot\frac{2\pi r}{\sqrt{(2\pi r)^2 + h_0^2}}$

і $F_{відц} = \frac{mv_\perp^2}{r} = \frac{m\cdot 2gh}{r}\cdot\frac{(2\pi r)^2}{(2\pi r)^2 + h_0^2}$. Нарешті, знаходимо модуль шуканої сили:

$$F = \sqrt{N^2 + F_{відц}^2} = \frac{mg}{1 + \left(\frac{h_0}{2\pi r}\right)^2}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{2h}{r}\right)^2}.$$

Відповідь: $F = \frac{mg}{1 + \left(\frac{h_0}{2\pi r}\right)^2}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{2h}{r}\right)^2}$.

4. У посудину, що містила m_1 = 500 г води при температурі t = 15 ^{0}С, кинули m_2 = 50 г мокрого снігу. Температура води в посудині знизилася на Δt = 5 ^{0}С. Скільки води було в снігу? Питома теплота плавлення снігу λ = 330 кДж/кг. Втратами теплоти знехтувати.

Розв'язання:

Мокрий сніг — це суміш кристаликів льоду при температурі 0 ^{0}С і води при тій самій температурі. Позначимо масу води в мокрому снігу через $m_в$. Після того як мокрий сніг кинули в посудину з водою, кристалики льоду розтанули, весь сніг перетворився на воду і вся ця вода нагрілася на $t–\Delta t$ градусів. Температура води, яка спочатку була в посудині, при цьому зменшилася від t до $t–\Delta t$ градусів. Отже, маємо таке рівняння теплового балансу:

$cm_1 \cdot (-\Delta t) + cm_2 \cdot (t - \Delta t) + \lambda \cdot (m_2 - m_в) = 0$, де c — питома теплоємність води. Звідси легко знаходимо шукану масу води в снігу:

$$m_в = \frac{cm_2 \cdot (t - \Delta t) - cm_1 \cdot \Delta t + \lambda \cdot m_2}{\lambda} \approx 25\ г.$$

Відповідь: $m_в = \dfrac{cm_2 \cdot (t - \Delta t) - cm_1 \cdot \Delta t + \lambda \cdot m_2}{\lambda} \approx 25\ г.$

5. Свинцева куля маси m = 10 г пробиває підвішене на довгій нитці тіло маси M = 1 кг, причому її швидкість у момент удару була v_1 = 300 м/с, а в момент вильоту з тіла v_2 = 200 м/с. Визначити зміну температури кулі, якщо на її нагрівання пішло η = 30% кількості теплоти, що виділилася під час руху кулі в тілі.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку кількість теплоти Q, яка виділилася під час руху кулі в тілі. Вона буде дорівнювати різниці початкової кінетичної енергії кулі $E_{k1} = \dfrac{mv_1^2}{2}$ та сумарної кінетичної енергії кулі $E_{k2} = \dfrac{mv_2^2}{2}$ і пробитого нею тіла $E_{k3} = \dfrac{Mu^2}{2}$ в момент вильоту кулі (тут u — швидкість пробитого тіла в момент вильоту кулі): $Q = E_{k1} - (E_{k2} + E_{k3})$. Оскільки, за умовою задачі, тіло підвішене на довгій нитці, то за час руху в ньому кулі його висота над землею, а отже, і потенціальна енергія не зміниться.

Знайдемо швидкість пробитого тіла u. Оскільки вздовж горизонтального напрямку руху кулі ніякі зовнішні сили ні на кулю, ні на тіло не діють (сила тяжіння та сила натягу нитки напрямлені вертикально), то проекція сумарного імпульсу такої системи на напрямок руху має зберігатися, тобто $mv_1 = mv_2 + Mu$. Звідси знаходимо: $u = \dfrac{m(v_1 - v_2)}{M}$.

Отже, для кількості теплоти Q одержуємо:

$$Q = \frac{m}{2} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 - \frac{m}{M} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right).$$

На нагрівання кулі пішла кількість теплоти $Q_{нагр} = \eta Q = cm \cdot \Delta t$, де c — питома теплоємність свинцю. Звідси легко знаходимо шукану зміну температури кулі: $\Delta t = \dfrac{\eta Q}{cm} = \dfrac{\eta}{2c} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 - \dfrac{m}{M} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right) \approx 62\ °C$.

Відповідь: $\Delta t = \dfrac{\eta}{2c} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 - \dfrac{m}{M} \cdot (v_1 - v_2)^2 \right) \approx 62\ °C$.

6. Знайти ККД насосної установки, яка подає за одиницю часу об'єм води V_t = 75 л/с на висоту h = 4,7 м через трубу, що має переріз S = 0,01 м^2, якщо двигун споживає потужність N = 10 кВт.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку корисну потужність насосної установки $N_{кор}$. Для цього розглянемо деякий малий об'єм води Δm, який витікає з труби на висоті h за короткий проміжок часу Δt. Цьому малому об'єму води насосна установка надала кінетичну енергію $\Delta E_k = \dfrac{\Delta m \cdot v^2}{2}$, де v — це швидкість витікання води з труби, і потенціальну енергію $\Delta E_n = \Delta m \cdot g \cdot h$. Отже, корисну потужність насосної установки можемо визначити як сумарну механічну енергію об'єму води, що пропускається насосною установкою за одиницю часу, тобто

$$N_{\text{êîð}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E_k + \Delta E_n}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right) = \rho\,\frac{\Delta V}{\Delta t}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right) = \rho V_t\left(\frac{v^2}{2} + gh\right).$$

Швидкість витікання води з труби можемо записати як $v = \dfrac{V_t}{S}$. Тоді для корисної потужності одержимо такий вираз: $N_{\text{êîð}} = \rho V_t \left(\dfrac{V_t^2}{2S^2} + gh \right)$. Тепер легко знаходимо шуканий ККД установки:

$$\eta = \frac{N_{\text{êîð}}}{N} = \frac{\rho V_t}{N}\left(\frac{V_t^2}{2S^2} + gh\right) \approx 0{,}56 = 56\ \%.$$

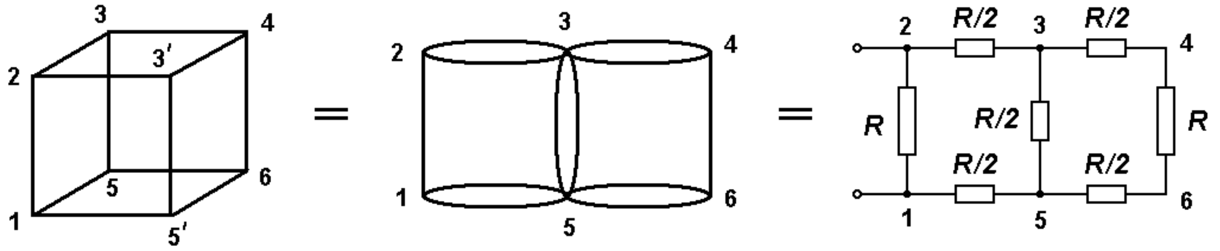
Відповідь: $\eta = \dfrac{\rho V_t}{N}\left(\dfrac{V_t^2}{2S^2} + gh\right) \approx 56\ \%$.

7. Знайти опір між сусідніми вершинами дротяного куба. Опір кожного ребра куба R = 1 Ом.

Розв'язання:

Якщо дві сусідні вершини дротяного куба, наприклад точки *1* і *2* (див. рис.), підключити до джерела напруги, то через ребра куба потече струм. При цьому потенціали точок *3* і *3´* будуть однаковими. Тому їх можна з'єднати.

При цьому розподіли струмів і потенціалів у різних точках куба не зміняться. Також однаковими будуть і потенціали точок 5 і $5'$, і тому їх також можна з’єднати. Отже, замість куба одержимо еквівалентне йому електричне коло, яке складатиметься з ділянок, що містять послідовно і паралельно з’єднані резистори (див. рис.).



Далі знаходимо опори таких ділянок. Так, наприклад, опір ділянки *3-4-6-5* дорівнює $R_{3465} = R/2 + R + R/2 = 2R$. Ця ділянка підключена паралельно до ділянки *3-5* з опором $R_{35} = R/2$. Міркуючи так, замінюємо сукупності послідовно чи паралельно з’єднаних опорів еквівалентними опорами і врешті-решт знаходимо сумарний опір між точками *1* і *2*: $R_{куба} = R_{12} = \dfrac{7}{12}R$.

Відповідь: $R_{куба} = \dfrac{7}{12}R$.

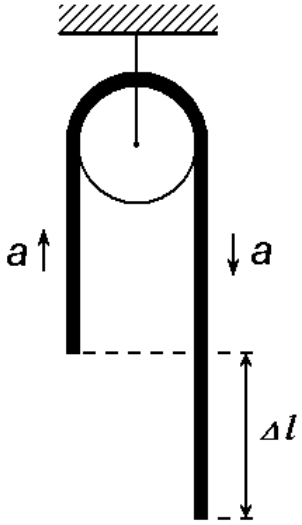
11 клас

1. Мотузку довжини l = 10 м перекинуто через блок. У початковий момент часу мотузка висить симетрично і є нерухомою, а потім у результаті незначного поштовху починає рухатися по блоку. Чи буде рух мотузки рівноприскореним? Якою буде швидкість руху мотузки в момент, коли вона зісковзне з блока? Масою блока знехтувати. Радіус блока значно менший за довжину мотузки.

Розв’язання:

Спочатку розглянемо стандартну задачу на прискорений рух двох тіл з масами m_1 і m_2, прив’язаних до протилежних кінців нерозтяжної легкої нитки, перекинутої через легкорухомий блок. Нехай, для визначеності, $m_2 > m_1$. Тоді $\Delta m = m_2 - m_1 = \text{const}$ і рух цих тіл буде відбуватися зі сталим прискоренням. Модуль прискорення буде тим більшим, чим більшою буде різниця мас Δm.

В умовах пропонованої задачі різниця мас частин мотузки по різні боки від блока не буде сталою, а буде постійно змінюватися під час руху: $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot S \cdot \Delta l \neq \text{const}$ (див. рис.). Тому й рух мотузки вже не буде рівноприскореним: прискорення зростатиме з часом у міру зростання різниці довжин лівої і правої частин мотузки Δl.



Швидкість мотузки в момент зісковзування з блока знайдемо із закону збереження енергії: кінетична енергія мотузки в момент зісковзування буде дорівнювати взятій з протилежним знаком зміні потенціальної енергії її центра мас: $E_k = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}$.

У початковий момент часу центр мас мотузки був розміщений посередині симетрично розташованих лівої і правої половин мотузки, тобто на відстані $l/4$ вниз від центра блока. У момент зісковзування центр мас мотузки буде розташовуватися строго в її середині. Відносно центра блока він опуститься на відстань $l/2$. Отже, зміна висоти центра мас мотузки за весь час її руху по блоку дорівнюватиме $-l/4$. Звідси можемо легко знайти шукану швидкість: $\frac{mv^2}{2} = -mg \cdot (-l/4) = mgl/4$. Остаточно одержимо $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

Відповідь: Рух мотузки не буде рівноприскореним. Швидкість мотузки в момент зісковзування з блока $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

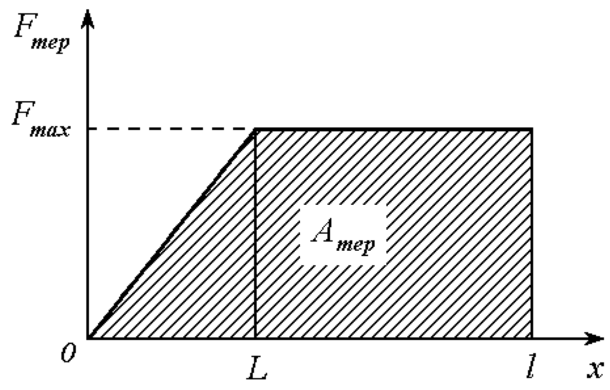
2. Санки, що рухаються по горизонтальному льоду зі швидкістю v = 6 м/с, в'їжджають на асфальт. Довжина полозів санок L = 2 м, коефіцієнт тертя санок об асфальт μ = 1. Який шлях проїдуть санки по асфальту до моменту повної зупинки?

Розв'язання:

Позначимо шлях, який проїдуть санки по асфальту до моменту зупинки, через l. Гальмування санок під час руху буде відбуватися під дією сили тертя ковзання полозів санок об асфальт. Ця сила змінюватиметься від нуля до свого максимального значення залежно від того, яка частина довжини полозів санок буде на асфальті. Якщо на асфальті буде частина довжини полозів санок x ($0 \le x \le L$), то тоді сила тертя дорівнюватиме: $F_{тер} = \frac{x}{L}\mu mg$. Відповідно, коли санки повністю заїдуть на асфальт, сила тертя буде максимальною і дорівнюватиме: $F_{max} = \mu mg$. Отже, рух санок по асфальту буде відбуватися під дією змінної з часом сили тертя і, відповідно, зі змінним з часом прискоренням.

Для того щоб визначити шуканий шлях l, скористаємося законом збереження енергії. Оскільки в момент зупинки санок їх кінетична енергія стане рівною нулеві, можемо записати: $\frac{mv^2}{2} = A_{тер}$, де $A_{тер}$ — робота сили тертя на повне гальмування санок. Цю роботу можна легко знайти, скориставшись графічним методом. Справді, побудуємо графік залежності сили тертя від відстані x, яку проїдуть санки по асфальту (див. рис.). Тоді шукана робота матиме вигляд площі заштрихованої трапеції, тобто

$$A_{òåð} = \mu m g \cdot \frac{L}{2} + \mu m g \cdot (l - L).$$



Прирівнявши ці два вирази, остаточно знаходимо: $l = \frac{v^2}{2\mu g} + \frac{L}{2} \approx 2,8\ м$.

Відповідь: $l = \frac{v^2}{2\mu g} + \frac{L}{2} \approx 2,8\ м$.

3. На яку висоту потрібно підняти поршень, що закриває вертикальну циліндричну посудину з водою, щоб уся вода випарувалася? Товщина шару води дорівнює h, густина води дорівнює ρ, її молярна маса дорівнює μ, тиск насиченої пари дорівнює p. Температура води й пари T підтримується незмінною. Повітря в посудині немає.

Розв'язання:

У герметично закритій посудині з рідиною завжди міститься сама рідина та її насичена пара. Для того щоб уся рідина під поршнем випарувалася, потрібно збільшити об'єм посудини настільки, щоб тиск, створюваний *усіма* молекулами речовини, що була в посудині (рідина + насичена пара), дорівнював або був меншим за тиск насиченої пари p за даної температури T.

Масу води під поршнем можемо знайти як $m = \rho \cdot S \cdot h$, де S — площа перерізу циліндричної посудини. Позначимо найменше значення об'єму, до якого потрібно збільшити об'єм простору під поршнем для випаровування усієї води, через V. Тоді, вважаючи насичену водяну пару ідеальним газом, можемо записати: $pV = \frac{\rho S h}{\mu} RT$. Об'єм V можемо записати як $V = S \cdot H$, де H — найменша висота, *на якій має перебувати* поршень, щоб уся вода випарувалася. Шукану висоту *підняття (переміщення)* поршня знаходимо як $\Delta H = H - h = h\left(\frac{\rho RT}{\mu p} - 1\right)$.

Відповідь: $\Delta H = h\left(\frac{\rho RT}{\mu p} - 1\right)$.

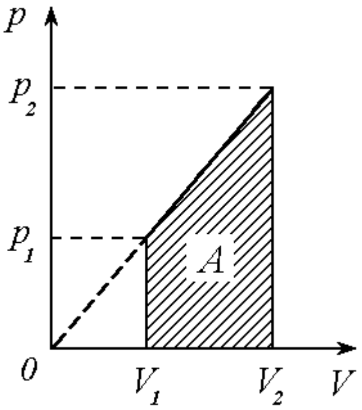
4. Температура деякої маси m ідеального газу з молярною масою μ змінюється за законом $T = \alpha \cdot V^2$. Знайти роботу, виконану газом при збільшенні об'єму від V_1 до V_2. Поглинається чи виділяється теплота у такому процесі?

Розв'язання:

Для того щоб знайти роботу, виконану газом при розширенні, потрібно знати залежність тиску газу p від його об'єму V. Для цього в рівняння Клапейрона-Менделєєва замість температури T підставимо $\alpha \cdot V^2$:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \frac{m}{\mu} R \alpha V^2.$$

Звідси одержимо: $p = \frac{\alpha m R}{\mu} \cdot V$. Отже, тиск газу лінійно зростатиме при збільшенні його об'єму.



Для визначення роботи, виконаної газом при розширенні, скористаємось графічним методом. Для цього побудуємо графік залежності тиску газу від його об'єму (див. рис.). Тоді робота, виконана газом при збільшенні його об'єму від V_1 до V_2, буде дорівнювати площі заштрихованої трапеції:

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{\alpha\, m\, R}{2\mu} \cdot \left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Оскільки при розширенні газу його температура зростає ($T = \alpha \cdot V^2$), а отже, зростає його внутрішня енергія ($\Delta U > 0$) і газом виконується робота ($A > 0$), то з першого закону термодинаміки ($\Delta Q = \Delta U + A$) випливає, що газу надається теплота ззовні ($\Delta Q > 0$), тобто газом теплота поглинається.

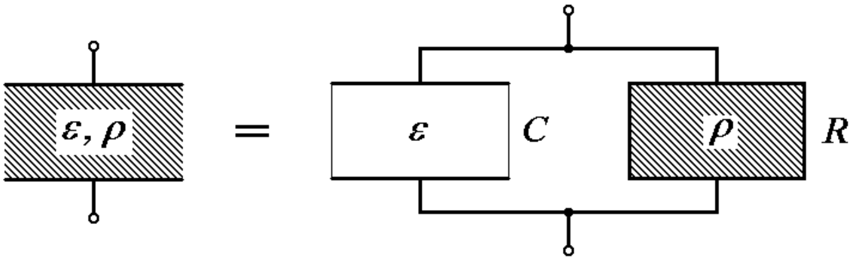
Відповідь: $A = \dfrac{\alpha\, m\, R}{2\mu} \cdot \left(V_2^2 - V_1^2\right)$. Теплота газом поглинається.

5. Плоский конденсатор, заповнений речовиною з діелектричною проникливістю ε і питомим опором ρ, підключено до джерела струму з ЕРС E та внутрішнім опором r. Знайти заряд, що накопичився на обкладинках конденсатора, якщо опір втрат конденсатора дорівнює R. Опором дротів знехтувати.

Розв'язання:

Позначимо площу обкладинок конденсатора через S, а відстань між ними через d. Тоді ємність конденсатора можна записати як $C = \dfrac{\varepsilon\, \varepsilon_0\, S}{d}$, а опір середовища між обкладинками як $R = \rho \dfrac{d}{S}$.

Конденсатор із втратами заряду можна подати у вигляді еквівалентної електричної схеми, яка має вигляд з'єднаних паралельно ідеального конденсатора (без втрат заряду) з ємністю C та опору R (див. рис.). Відповідно, напруга U на конденсаторі і на опорі буде однаковою.



Струм I, що протікатиме через опір R, за законом Ома для повного кола дорівнюватиме $I = \dfrac{E}{R + r}$. Отже, заряд на обкладинках конденсатора можемо записати у вигляді:

$$q = C \cdot U = C \cdot R \cdot I = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \rho \cdot I = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \rho \cdot \frac{E}{R + r}.$$

Відповідь: $q = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \rho \cdot \dfrac{E}{R + r}$.

6. При якій напрузі запалюється неонова лампочка, якщо відстань між електродами, що мають форму паралельних плоских пластин, дорівнює d, енергія іонізації неону W, середня довжина вільного пробігу електронів між двома послідовними зіткненнями з атомами неону l? Заряд електрона дорівнює e.

Розв'язання:

Неонова лампочка загориться тоді, коли електрони, прискорюючись електричним полем, що існує між електродами лампи, зможуть на довжині свого вільного пробігу l (середній відстані, яку встигає пролетіти електрон між двома послідовними зіткненнями з атомами неону) набрати таку кінетичну енергію, яка перевищить енергію іонізації атомів неону W. Інакше кажучи, робота електричного поля над електронами на шляху l має бути рівною або більшою за енергію іонізації неону: $A = F \cdot l = e \cdot E \cdot l = e \cdot l \cdot \dfrac{U}{d} \geq W$.

Звідси легко знаходимо напругу запалювання лампи: $U = \dfrac{W \cdot d}{e \cdot l}$.

Відповідь: $U = \dfrac{W \cdot d}{e \cdot l}$.

7. При якій швидкості поїзда ресори вагонів будуть особливо сильно коливатися під дією поштовхів коліс об стики рейок? Довжина рейки дорівнює l, сила, що діє на ресору, дорівнює F, ресора прогинається на відстань h під дією сили f.

Розв'язання:

Ресори вагонів особливо сильно коливатимуться під дією поштовхів коліс об стики рейок в умовах резонансу, тобто тоді, коли частота поштовхів ν_1 буде рівною частоті вільних коливань ресор під дією сили пружності ν_2. Частота поштовхів коліс об стики рейок: $\nu_1 = \dfrac{v}{l}$, де v — швидкість руху поїзда. Коефіцієнт жорсткості ресор вагона $k = \dfrac{f}{h}$, а маса вагона $m = \dfrac{F}{g}$. Звідси знаходимо частоту вільних коливань ресор: $\nu_2 = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{f\,g}{h\,F}}$.

Прирівнюючи ці дві частоти, остаточно одержуємо: $v = \dfrac{l}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{f\,g}{h\,F}}$.

Відповідь: $v = \dfrac{l}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{f\,g}{h\,F}}$.

ЗМІСТ

1. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з математики настановної сесії *(Борисенко О. В.)* 5

2. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з фізики настановної сесії *(Засєдка Л. М.)* 8
   2.1. 10 клас 8
   2.2. 11 клас 9

3. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з математики настановної сесії (*Борисенко О. В.)* 12

4. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з фізики настановної сесії (*Засєдка Л. М.)* 14

5. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з математики дослідницько-експериментальної сесії (*Борисенко О. В.)* 19

6. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії *(Засєдка Л. М.)* 22

7. Вказівки до виконання заочної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії 25

8. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з математики дослідницько-експериментальної сесії *(Борисенко О. В*.) 26

9. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи з фізики дослідницько-експериментальної сесії *(Засєдка Л. М*.) 28

10. Вказівки та деякі рекомендації до виконання контрольних робіт з математики 33

11. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до вступної заочної контрольної роботи з фізики настановної сесії *(Кравченко В.М.)* 37
   11.1. 10 клас 37
   11.2. 11 клас 41

12. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до очної контрольної роботи
з фізики настановної сесії *(Кравченко В.М.)* 48
12.1 10 клас 48
12.2. 11 клас 52

13. Завдання, методичні вказівки та розв'язки до заочної контрольної роботи
з фізики дослідницько-експериментальної сесії *(Кравченко В.М.)* 58
13.1 10 клас 58
13.2 11 клас 63

Формат 60 × 84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м^2.

Видавництво: ТОВ «Праймдрук»
01023, м. Київ, вул. Еспланадна, 20, офіс 213

Свідоцтво про внесення
до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серія ДК № 4222 від 07.12.2011.